# 차 례

# 머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업시대, 과학과 기술의 시대인 오늘 수학의 지식과 방법을 모르고서는 현대과학과 기술을 배울수도 없고 발전시킬수도 없다. 바로 그렇기때문에 수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 된다.

수학은 반만년의 가장 오랜 력사를 가진 과학이다.

시대의 변천에 따르는 사람들의 생활과 실천의 요구로부터 수와 도형에 관한 단편적인 지식의 축적으로 발생한 수학은 오늘 모든 과학과 기술의 기초로 되는 현대수학으로까지 발전하여왔다.

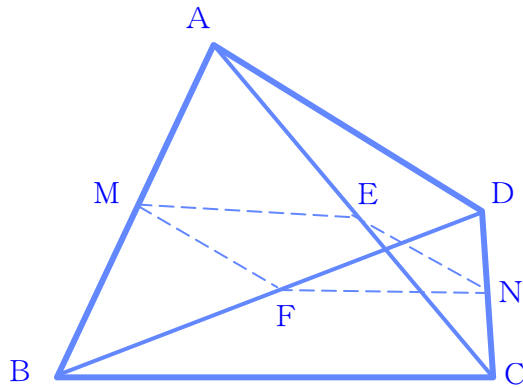
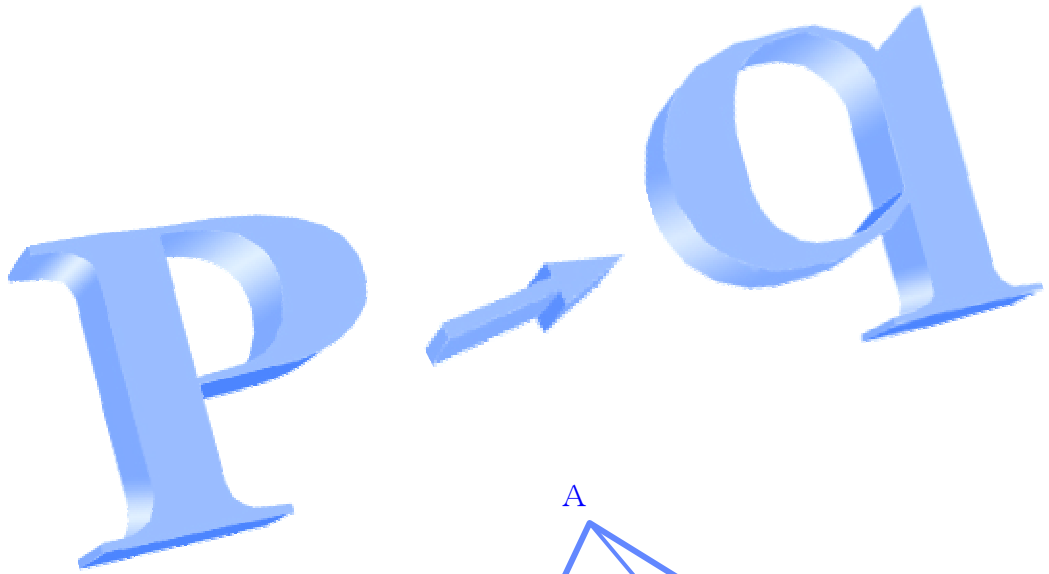
지금 수학은 3대과학분야인 수학과학, 자연과학, 사회과학의 한 부문으로 되고있다.

수학은 사색을 요구하는 창조적인 과학이다. 수학을 잘 배워 그 방법을 잘 익히면 머리가 트이고 모든 사물현상을 조리있게 보고 판단하는 힘이 생기며 과학적인 사고능력을 키울수 있다.

아무리 복잡한 수학공식이나 원리라고 하여도 자기 머리로 사고하고 처음부터 리치를 차근차근 따져가면 그것을 확고하게 습득할수 있다. 또한 깊은 지식을 습득하고 수학적지능을 키워나가면 아무리 복잡한 문제라도 쉽게 풀수 있으며 새로운 공식도 발견할수 있다.

3학년 수학에서는 정리와 그 증명에 대한 지식을 앞세우면서 식과 방정식, 함수 그리고 간단한 평면도형들, $\frac{1}{2}$제곱 등을 배운다.

우리는 자기 땅에 발을 붙이고 눈은 세계를 보며 조선을 위하여 배우고 또 배워 선군의 내 나라를 과학과 기술로 빛내여나가는 훌륭한 인재가 되기 위하여 적극 노력하여야 한다.

# 제1장. 정리와 증명

## 제1절. 정리와 기초성질

### 1. 명제, 조건과 결론

**알아보기** 다음 글 또는 식이 옳은가 옳지 않은가?

1) 《평행직선에서 엇각은 같지 않다.》
2) 《$a=2$이면 $a-2=0$》
3) 《$x+5=8$》

수학에서 옳다든가 옳지 않다든가를 찍어서 말할수 있는 글이나 식을 명제라고 부른다.
명제가운데는 옳은것도 있고 옳지 않은것도 있다.

알아보기에서
1) 《평행직선에서 엇각은 같지 않다.》: 옳지 않은 명제
2) 《$a=2$이면 $a-2=0$이다.》: 옳은 명제
3) 《$x+5=8$》: 명제가 아니다.(옳은지 옳지 않은지 찍어말할수 없다.)

명제는 《 ▭이면 ▭이다.》의 두 부분으로 갈라볼수 있다.

**례** 《2등변3각형의 두 밑각은 같다.》
이 명제를 다음과 같이 고쳐쓸수 있다.
《어떤 3각형이 2등변3각형이면 그 3각형의 두 밑각은 같다.》
이것은 다음과 같은 두개의 부분으로 되여있다.

《어떤 3각형이 2등변3각형이다.》 ………………………… $p$
《그 3각형의 두 밑각은 같다.》 ……………………………… $q$

일반적으로 명제의 첫 부분을 $p$로, 둘째 부분을 $q$로 표시하면 그 명제는

《$p$이면 $q$이다.》

즉 $p \to q$로 표시할수 있다.

명제를 이런 모양으로 고쳤을 때 첫째 부분($p$)을 명제의 **조건**, 둘째 부분($q$)을 명제의 **결론**이라고 부른다.

명제는 조건과 결론으로 이루어져있다.
《$p$이면 $q$이다.》 즉 $p \to q$
(조건) (결론)

## 문 제

다음 명제들에서 조건과 결론을 말하여라.

1) 《2등변3각형은 뾰족3각형이다.》

2) 《△ABC에서 ∠A=∠R이면 ∠B, ∠C는 뾰족각이다.》

3) 《6의 배수는 짝수이다.》

## 2. 정리와 증명

명제가 옳다는것을 밝히기 위해서는 명제의 조건으로부터 시작하여 이미 알고 있거나 옳다는것이 밝혀진 사실들을 써가면서 결론을 이끌어내야 한다.

**례 1** 《그림 1-1에서 AD=BC, ∠ADC=∠BCD이면 AC=BD이다.》가 옳다는것을 밝혀라.

**조건.** 4각형 ABCD에서 AD=BC, ∠ADC=∠BCD

**결론.** AC=BD

이 명제가 옳다는것을 밝히자.

△ACD와 △BDC에서

∠ADC=∠BCD (조건)

AD=BC (조건)

DC는 공통변

즉 이 두 3각형에서 두 변과 그사이의 각이 각각 서로 같다.

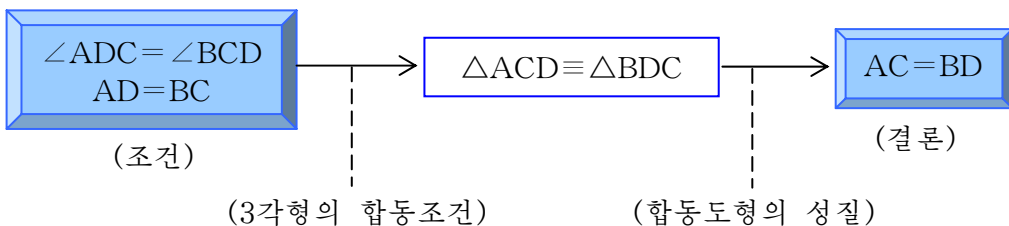
따라서 △ACD≡△BDC

이로부터 대응하는 변 AC=BD ……… 결론

A
B
C
D

그림 1-1

이것은 3각형의 합동조건과 합동도형에서 대응하는 변이 같다는 성질을 써서 차근차근 따져가면서 결론을 이끌어낸것이다.

이 과정을 도식으로 나타내면 다음과 같다.

명제가 옳다는것을 명제의 조건과 알고있는 성질을 가지고 밝혀내는것을 증명이라고 부른다.

**례 2** 명제 《3각형의 아낙각들의 합은 180°이다.》를 그림 1－2에서처럼 점 C에서 한 변 AB에 평행인 직선을 그어서 다음과 같이 증명할수 있다.

$\angle x = \angle z_1$ (평행직선의 엇각)

$\angle y = \angle z_2$ (평행직선의 같은자리각)

따라서

$$\angle x + \angle y + \angle z = \angle z_1 + \angle z_2 + \angle z = 180^\circ$$

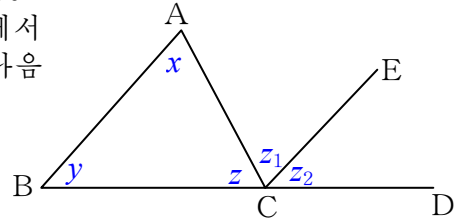



그림 1-2

**례 3** 4각형의 아낙각의 합이 360°라는것을 증명하여라.(그림 1－3)

**조건.** ABCD는 4각형

**결론.** $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

**(증명)** 대각선 AC를 그으면

△ABC와 △ACD가 생긴다.

△ABC의 아낙각의 합＝180°

△ACD의 아낙각의 합＝180°

4각형 ABCD의 아낙각의 합＝△ABC의 아낙각의 합＋△ACD의 아낙각의 합＝180°＋180°＝360°

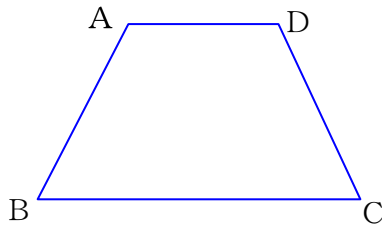



그림 1-3

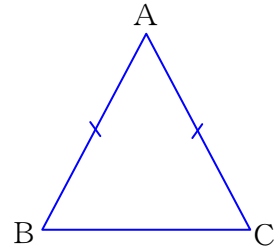



그림 1-4

## 문 제

《2등변3각형 ABC에서(AB＝AC) ∠B＝∠C이다.》에서 조건과 결론을 말하고 증명하여라.(그림 1－4)

수학에서 가장 기초로 되는 몇개의 명제는 명백하다고 보면서 증명하지 않고 써먹는다.

**증명하지 않고 써먹기로 하는 기초로 되는 명제를 기초성질이라고 부른다.**

**례 4** 다음의것들은 수학에서 늘 쓰는 기초성질이다.

《$a=b$, $b=c$이면 $a=c$》

《$a$, $b$가 아무런 수라도 $a+b=b+a$》

《주어진 두 점을 지나는 직선은 꼭 하나 있다.》

《직선밖의 한 점을 지나며 그 직선에 평행인 직선은 하나밖에 없다.》

수학에서는 또한 다음과 같은 명제들도 기초성질로 잡는다.

**기 초 성 질**

1° 평행직선에서
① 같은자리각은 같다.
② 엇각은 같다.
2° 다음의 매 경우에 두 직선은 평행이다.
① 같은자리각이 같을 때
② 엇각이 같을 때
3° 다음의 매 경우에 두 3각형은 합동이다.
① 세쌍의 변이 각각 같을 때 (세변조건)
② 두쌍의 변과 그사이에 끼여있는 한쌍의 아낙각이 각각 같을 때 (변각변조건)
③ 한쌍의 변과 그에 붙어있는 두쌍의 아낙각이 각각 같을 때 (각변각조건)
4° 두 점을 맺는 선들가운데서 길이가 제일 짧은것은 선분이다.

**알아보기** 4각형의 아낙각들의 합이 360°라는것을 증명할 때 3각형에 관한 어떤 명제를 써먹었는가?

어떤 명제가 옳다는것이 증명되였다면 그 명제를 다른 명제들을 증명할 때 써먹을수 있다.

증명을 해서 옳다는것이 밝혀진 명제들가운데서 중요하게 쓰이는것을 정리라고 부른다.

**례 5** 정리 《2등변3각형의 정각의 2등분선은 밑변에 수직이다.》를 증명하여라.(그림 1－5)

조건. △ABC에서 AB＝AC, ∠BAD＝∠CAD
결론. AD⊥BC
(증명) 3각형의 세 아낙각의 합은 2∠R이므로
△ABD에서
∠BAD＋∠B＋∠ADB＝2∠R
△ACD에서
∠CAD＋∠C＋∠ADC＝2∠R
그리고 이 두 식에서
∠BAD＝∠CAD(조건)
∠B＝∠C(조건)
따라서 ∠ADB＝∠ADC
그런데 이 두 각의 합이 평각 ∠BDC와 같으므로
∠ADB＝2∠R÷2＝∠R
그러므로 AD⊥BC

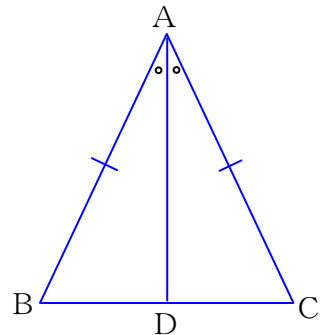



그림 1-5

명제를 나타내거나 증명할 때 또는 문제를 풀 때에는 쓰는 말의 뜻을 똑똑히 알고있어야 한다.

**어떤 대상의 뜻을 밝혀놓은 글을 정의라고 부른다.**

례 6 《2의 배수를 짝수라고 부른다.》(짝수의 정의)
《두 직선이 직각으로 사귈 때 이 두 직선은 서로 수직이라고 말한다.》
(두 직선의 수직의 정의)

### 문 제

1. 다음 정리를 증명하여라.
   3각형에서 한 바깥각은 그결에 있지 않는 두 아낙각의 합과 같다.
2. 두 직3각형은 다음과 같은 경우에 합동이라는것을 증명하여라.(직3각형의 합동조건)
   1) 두쌍의 직각변이 각각 같을 때
   2) 대응하는 한쌍의 변과 한쌍의 뾰족각이 각각 같을 때
   3) 빗변과 한쌍의 직각변이 각각 같을 때
3. 바른3각형 ABC의 변 AC, CB에 AP=CQ인 점 P, Q를 정하고 AQ, BP의 사귐점을 O라고 하면
   1) 3각형 ABP와 AQC는 합동이다. 왜 그런가?
   2) $\angle BOQ=60°$이다. 왜 그런가?

알아보기 1. 다음 명제의 조건과 결론을 바꾸어 말해보아라.
   1) 《두 직선이 평행이면 같은자리각이 같다.》
   2) 《6의 배수는 짝수이다.》
2. 1에서 조건과 결론을 바꾸었을 때의 명제가 옳은 명제로 되는가?

**명제 $p \to q$가 있을 때 조건과 결론을 바꾸어놓은 새로운 명제 $q \to p$를 본 명제의 거꿀명제라고 부른다.**

례 7 《△ABC에서 AB=AC이면 ∠B=∠C이다.》의 거꿀명제를 만들자.

**조건.** $(p)$…△ABC에서 AB=AC
**결론.** $(q)$…△ABC에서 ∠B=∠C

조건과 결론을 바꾸어놓으면 다음과 같은 거꿀명제를 얻는다.

《△ABC에서 ∠B=∠C이면 AB=AC이다.》

**어떤 명제가 옳다고 해서 거꿀명제가 반드시 옳은것은 아니다.**

알아보기에서 1)의 거꿀명제는 옳지만 2)의 거꿀명제는 옳지 않다.

## 문 제

다음 명제들의 거꿀명제를 만들고 그 거꿀명제가 옳은가 옳지 않은가를 말하여라.

1) 《옹근수에서 하나의 자리수자가 0이면 그 옹근수는 10의 배수이다.》

2) 《3각형에서 한 아낙각이 직각이면 나머지 두 아낙각은 각각 뾰족각이다.》

3) 《$x>0$이면 $x^2>0$이다.》

《정리》는 이미 증명된것이므로 물론 옳다. 그러나 정리의 거꿀명제는 옳을수도 있고 옳지 않을수도 있다.

그러므로 정리가 증명된 다음에도 그 거꿀명제가 옳다는것을 말하기 위해서는 반드시 증명을 하여야 한다.

정리의 거꿀명제가 옳을 때 그 거꿀명제를 본정리의 거꿀정리라고 부른다.

## 련 습 문 제

1. 선분의 수직2등분선에 있는 점은 선분의 두 끝점으로부터 같은 거리에 있다. 증명하여라.
2. 문제 1의 거꿀정리를 만들고 증명하여라.
3. 각의 2등분선에 놓이는 점은 두 변으로부터 같은 거리에 있다. 증명하여라.
4. 문제 3의 거꿀정리를 만들고 증명하여라.
5. ∠A(=∠R)를 하나 그리고 그 두 변에 AB=AC로 되게 점 B, C를 하나씩 찍어라. 다음에 점 A를 지나는 한 직선을 긋고 이 직선에 점 B로부터 수직선 BD(밑점 D), 점 C로부터 수직선 CE(밑점 E)를 그어라. 이때 선분 DE, BD, CE의 길이들사이에 어떤 관계가 있는가?(직선이 각의 아낙을 지나는 경우와 각의 아낙을 지나지 않는 경우를 갈라서 생각하여라.)
6. 바른3각형 ABC의 옆변 AB, AC를 각각 빗변으로 하고 그 바깥쪽에 직2등변3각형 ABP, ACQ를 그리고 점 P, Q를 변 BC의 가운데점 M과 맺으면 MP=MQ임을 증명하여라.
7. 2등변3각형 ABC의 옆변 AB, AC의 연장선에 각각 D, E를 정하되 BC의 가운데점 M으로부터의 거리가 같게 하면 3각형 ADE는 어떤 3각형인가?
8. 2등변3각형의 밑변의 한 점으로부터 다른 두 변까지의 거리의 합은 밑각의 한 정점에서 옆변에 그은 높이와 같다. 증명하여라.
9. ∠A의 한 변에 두 점 B와 C를, 다른 한 변에 두 점 D, E를 AB=AD, AC=AE 되게 잡으면 BE, CD의 사귐점과 점 A를 맺는 직선은 ∠A를 2등분한다. 증명하여라.

## 제2절. 4각형

### 1. 평행4변형

두쌍의 맞은변이 각각 서로 평행인 4각형을 평행4변형이라고 부른다.

평행4변형의 정의로부터 그 성질을 이끌어낼수 있다.

**례** 평행4변형에서 두쌍의 맞은변은 각각 서로 같다는것을 증명하여라.

조건. 4각형 ABCD에서

$AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

결론. $AB=DC$, $AD=BC$

(증명) 대각선 AC를 그으면(그림 1-6)

△ABC와 △CDA에서

$\angle BAC = \angle DCA$ ($AB \parallel DC$) (1)

$\angle BCA = \angle DAC$ ($AD \parallel BC$) (2)

AC는 공통변 (3)

식 (1), (2), (3)에 의하여

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$(각변각조건)

$\therefore AB=DC$, $BC=AD$

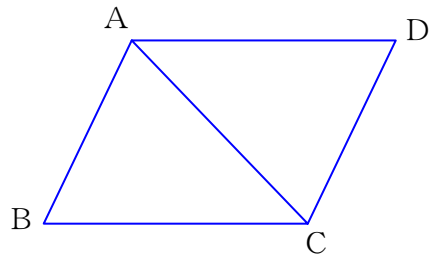



그림 1-6

**알아보기** 1. 례의 증명으로부터 평행4변형의 맞은각이 같다고 말할수 있는가?

2. 대각선 BD를 더 그었을 때 두 대각선은 서로 가운데점에서 사귄다는것을 알아보아라.

정리 1. 평행4변형에서

1) 두쌍의 맞은변은 각각 서로 같다.
2) 두쌍의 맞은각은 각각 서로 같다.
3) 두 대각선은 서로 가운데점에서 사귄다.

평행4변형 ABCD를 ▱ABCD로 표시한다.

### 문 제

1. ▱ABCD의 대각선 BD에 정점 A와 C에서 수직선 AE, CF를 그으면 $AE=CF$임을 증명하여라.
2. ▱ABCD에서 대각선 AC와 BD의 사귐점을 O라고 하자. O를 지나는 직선과 변 AD, BC와의 사귐점을 각각 E, F라고 하면 $OE=OF$임을 증명하여라.
3. ▱ABCD($AB<AD$)의 정점 A에서 ∠D의 2등분선에 그은 수직선이 변 BC와 사귀는 점을 E라고 하면 $AB=BE$임을 증명하여라.(그림 1-7)

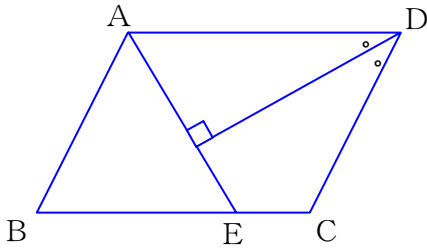



그림 1-7

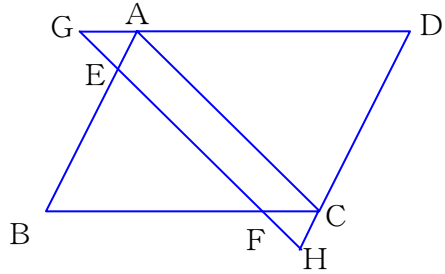



그림 1-8

4. ▱ABCD의 대각선 AC에 평행인 직선이 변 AB, BC와 각각 E, F에서 사귀고 또 DA, DC의 연장선과 각각 G, H에서 사귄다고 하면 GE＝FH임을 증명하여라.(그림 1－8)
5. 2등변3각형 ABC의 밑변 BC의 임의의 점 D에서 AB, AC에 평행인 직선을 그어 AB, AC와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하면 3각형 EBD와 FDC의 둘레의 길이의 합은 3각형 ABC의 둘레의 길이와 같다. 왜 그런가?
6. ▱ABCD에서 정점 B로부터 AD에 수직선을 긋고 그 밑점을 E라고 하자. 점 E에 관한 A의 대칭점을 H라고 하자. 또 정점 D에서 AB에 수직선을 긋고 그 밑점을 F, 점 F에 관한 A의 대칭점을 G라고 하고 직선 BE, DF의 사귐점을 O라고 하면 직선 OC는 선분 GH를 수직2등분한다. 증명하여라.

정리 1의 거꿀명제에 대하여 보자.

**정리 2. 두쌍의 맞은변이 각각 서로 같은 4각형은 평행4변형이다.**

**조건.** 4각형 ABCD에서
AB＝DC, AD＝BC
**결론.** 4각형 ABCD는 평행4변형
**(증명)** 대각선 AC를 그으면(그림 1－9)
△ABC와 △DCA에서
AB＝DC (조건)
BC＝AD (조건)
AC는 공통변
∴ △ABC≡△CDA (세변조건)
∴ ∠BAC＝∠DCA
따라서 AB∥DC (엇각이 같으므로)
마찬가지로 ∠DAC＝∠BCA로부터 AD∥BC
그러므로 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

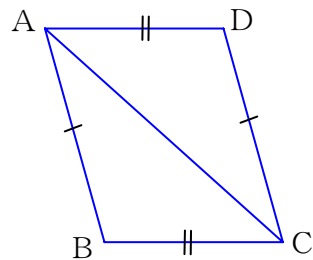



그림 1-9

**정리 3. 한쌍의 맞은변이 서로 같고 또 평행인 4각형은 평행4변형이다.**

조건. 4각형 ABCD에서

AB=DC, AB∥DC

결론. 4각형 ABCD는 평행4변형

(증명) 대각선 BD를 그으면 (그림 1-10)

△ABD와 △CDB에서

AB=DC (조건)

BD는 공통변

∠ABD=∠CDB (AB∥DC)

△ABD≡△CDB (변각변조건)

∴ ∠ADB=∠CBD

따라서 AD∥BC (엇각이 같으므로)

그러므로 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

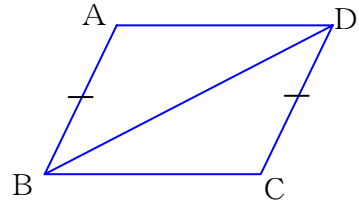



그림 1-10

**정리 4. 두쌍의 맞은각이 각각 서로 같은 4각형은 평행4변형이다.**

조건. 4각형 ABCD에서

∠A=∠C, ∠B=∠D

결론. 4각형 ABCD는 평행4변형

(증명) 4각형의 아낙각의 합은 4∠R이므로

∠A+∠B+∠C+∠D=4∠R

여기서 ∠A=∠C, ∠B=∠D

∴ ∠A+∠B+∠A+∠B=4∠R

∠A+∠B=2∠R (1)

또한 ∠A+∠DAE=2∠R (2)

(1), (2)로부터

∠B=∠DAE(2∠R−∠A)

따라서 AD∥BC (같은자리각이 같으므로)

그리고 ∠DAE=∠B=∠D

따라서 AB∥DC (엇각이 같으므로)

그러므로 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

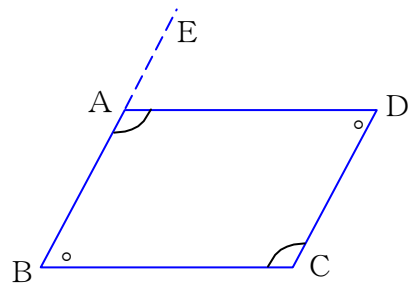



그림 1-11

**정리 5. 4각형에서 두 대각선이 서로 가운데점에서 사귀면 이 4각형은 평행4변형이다.**

조건. 4각형 ABCD에서

AO=OC, BO=OD (O는 두 대각선의 사귐점)

결론. 4각형 ABCD는 평행4변형

(증명) △AOB와 △COD에서

AO=OC (조건)

BO=OD (조건)

∠AOB=∠COD (맞문각)

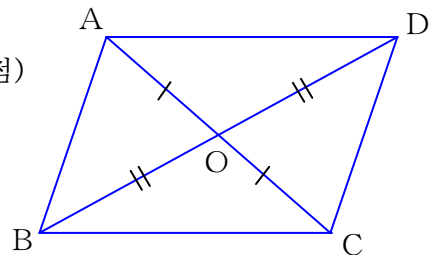



그림 1-12

∴ △AOB≡△COD (변각변조건)
∴ AB=DC (1)
마찬가지로 △AOD≡△COB
∴ AD=BC (2)
(1), (2)로부터 정리 2에 의하여 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

이상의것을 하나로 묶어보면 다음과 같다.

**평행4변형이 될 조건**

1) 두쌍의 맞은변이 각각 서로 평행일 때 (정의)
2) 두쌍의 맞은변이 각각 서로 같을 때 (정리 2)
3) 한쌍의 맞은변이 같고 또 평행일 때 (정리 3)
4) 두쌍의 맞은각이 각각 서로 같을 때 (정리 4)
5) 두 대각선이 서로 가운데점에서 사귈 때 (정리 5)

## 문 제

1. 4각형 ABCD에서 AB=DC, AD∥BC일 때 이 4각형은 반드시 평행4변형이겠는가?
2. 그림 1−13에서 4각형 ABCD는 평행4변형이고 BE, DF는 각각 ∠ABC, ∠CDA의 2등분선이다. 4각형 BFDE도 평행4변형이라는것을 증명하여라.

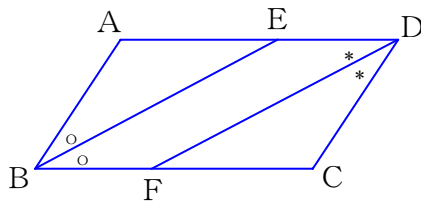
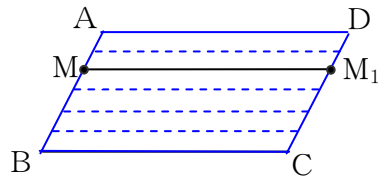



그림 1-13 그림 1-14

3. ▱ABCD를 하나 그려라. 변 AB에 한 점 M을 찍고 이 점을 지나며 AD에 평행인 직선을 그어 사귀는 점을 $M_1$이라고 하여라.(그림 1−14) 이때
   1) 4각형 $AMM_1D$는 무슨 4각형인가?
   2) $MM_1$ ∥= BC이다. 왜 그런가?( ∥= 는 평행이며 같다는 기호이다.)
4. ▱ABCD를 하나 그리고 두 대각선의 사귐점을 O라고 하고 선분 BO와 OD의 가운데점을 각각 E, F라고 하면 4각형 AECF는 무슨 4각형인가?
5. ▱ABCD를 그려라. 이 대각선의 사귐점 O를 중심으로 하는 한 원둘레를 그리고 직경 LM을 그어라. 이때 4각형 ALCM과 LBMD는 무슨 4각형인가?
6. 3각형 ABC의 ∠A의 2등분선이 변 BC와 사귀는 점을 D, 이 점에서 CA에 평행되게 그은 직선이 AB와 사귀는 점을 E, 이 점에서 BC에 평행되게 그은 직선이 AC와 사귀는 점을 F라고 하면 AE=FC이다. 증명하여라.

## 2. 직4각형과 등변4각형

> 아낙각들이 다 직각인 평행4변형을 직4각형, 변들이 다 같은 평행4변형을 등변4각형이라고 부른다.

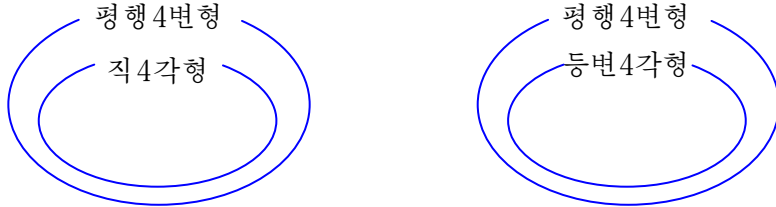



그림 1-15

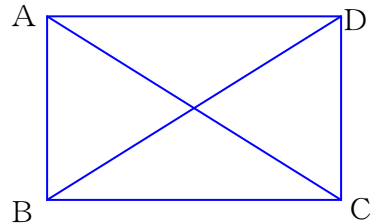
직4각형과 등변4각형은 평행4변형의 성질을 다 가진다.
그리고 그밖에 특별한 성질을 더 가지고있다.

**례** 직4각형의 두 대각선은 서로 같다는것을 증명하여라.

조건. 4각형 ABCD는 직4각형
결론. BD＝AC
(증명) △DAB와 △CBA에서
DA＝CB (평행4변형의 맞은변)
AB는 공통변
∠A＝∠B(＝∠R) (직4각형의 아낙각)
∴ △DAB≡△CBA (변각변조건)
∴ BD＝AC

A D B C

그림 1-16

거꾸로 두 대각선이 서로 같은 평행4변형은 직4각형이라는것을 알수 있다.

1. 등변4각형의 두 대각선은 서로 수직이라고 말할수 있는가?
2. 그 거꿀도 성립하겠는가?

평행4변형이 직4각형이 될 조건

1) 한 아낙각이 직각일 때
2) 두 대각선이 같을 때

평행4변형이 등변4각형이 될 조건

1) 서로 이웃한 두 변이 같을 때
2) 두 대각선이 서로 수직일 때

바른4각형은 직4각형이면서 동시에 등변4각형이다.

바른4각형은 변들이 다 같은 직4각형 또는 아낙각들이 다 직각인 등변4각형이다.

P … 직4각형의 모임

Q … 등변4각형의 모임

R … 바른4각형의 모임

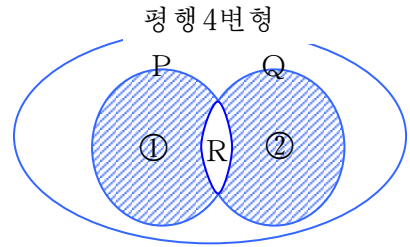



그림 1-17

이라고 할 때

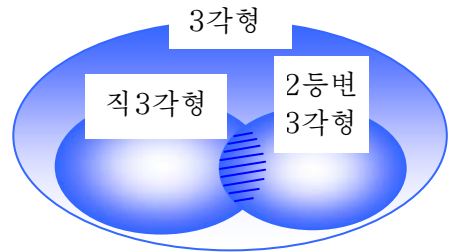
$$R \subset P, \quad R \subset Q$$

이로부터 바른4각형은 평행4변형의 성질, 직4각형의 성질, 등변4각형의 성질을 다 가진다.

## 문 제

1. 그림 1－17에서 빗선을 친 부분 ①, ②에는 각각 어떤 도형이 속하겠는가?
2. 1) 평행4변형에서 한 대각선을 그으면 3각형이 두개 생긴다. 평행4변형이 직4각형, 등변4각형, 바른4각형으로 되면 그 3각형은 어떤 3각형으로 되는가?
   2) 그림 1－18에서 빗선을 친 부분에는 어떤 3각형이 속하겠는가?
3. 다음의 4각형들가운데서 직4각형과 등변4각형을 찾아내여라.
   ① $AB=CD$, $AB \parallel CD$, $AC=BD$
   ② $AB=DC$, $AD=BC$, $AB=BC$
   ③ $AB \parallel DC$, $AD=BC$, $\angle B=\angle C$
   ④ $AB=AD$, $BC=DC$, $AC \perp BD$
   ⑤ $AO=OC$, $BO=OD$, $\angle B=90°$

그림 1-18

4. 평행4변형에 한 대각선을 그으면 합동인 두개의 3각형이 생긴다. 그 3각형이 직3각형, 2등변3각형 또는 직2등변3각형일 때 그 평행4변형은 무슨 4각형인가?
5. 평행4변형의 한 정점에서 그 정점을 지나지 않는 두 변까지의 거리가 같으면 그 평행4변형은 어떤 4각형인가?
6. 바른4각형 ABCD안에 있는 점 O를 지나는 서로 수직인 직선이 AB, BC, CD, DA와 사귀는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하면 $PR=QS$이다. 증명하여라.

### 3. 평행이동

#### 1) 평행이동과 벡토르

평면 P에 있는 점 모두를 그 평면에 있는 화살 $AA_1$의 방향으로 그 길이만큼 평행으로 이동하면 평면 P에 있는 도형 F는 평면 P의 다른 도형 $F_1$로 넘어간다.

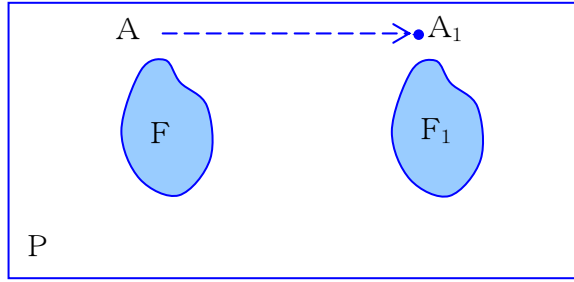



그림 1-19

평면 P에 화살 $MM_1$이 있다.

평면 P의 모든 점을 각각 화살 $MM_1$의 방향으로 선분 $MM_1$의 길이만큼 옮기는것을 평행이동이라고 부른다.

**알아보기** 길이와 방향이 같은 방향붙은 두 선분 $MM_1$, $NN_1$이 있다.(그림 1－20) 화살 $MM_1$에 의한 평행이동에서 점 P가 점 $P_1$로 넘어간다면 화살 $NN_1$에 의한 평행이동에서는 점 P가 어떤 점으로 넘어가겠는가?

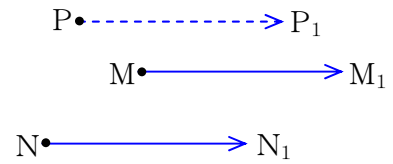



그림 1-20

평행이동을 결정하는 방향붙은 선분에 대해서는 길이와 방향만을 알면 되고 그것이 어떤 자리에 있든지 관계가 없다.

길이와 방향만을 생각할 때 방향붙은 선분 $MM_1$을 벡토르라고 부르며 $\overrightarrow{MM_1}$과 같이 표시한다. 점 M을 벡토르의 첫점, 점 $M_1$을 벡토르의 끝점이라고 부른다. 벡토르를 $\vec{a}$와 같이 하나의 글자와 화살로 표시하기도 한다.

(첫점) (끝점)

M $\overrightarrow{MM_1}$ $M_1$ $\vec{a}$

두 벡토르의 길이와 방향이 같으면 그 두 벡토르는 같다고 말한다.

두 벡토르 $\overrightarrow{MM_1}$과 $\overrightarrow{NN_1}$이 같다는것을

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{NN_1}$$

와 같이 표시한다.

평행이동은 벡토르로 나타낼수 있다. 벡토르 $\overrightarrow{MM_1}$이 나타내는 평행이동을 간단히 《평행이동 $\overrightarrow{MM_1}$》과 같이 부르기도 한다.

## 문 제

1. $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{NN_1}$일 때 평행이동 $\overrightarrow{MM_1}$과 평행이동 $\overrightarrow{NN_1}$은 같은 평행이동으로 된다고 말할수 있는가?
2. 벡토르 $\vec{a}$와 점 A, B, C가 있다.(그림 1－21)
   점 A, B, C를 각각 첫점으로 하여 벡토르 $\vec{a}$를 그려라.

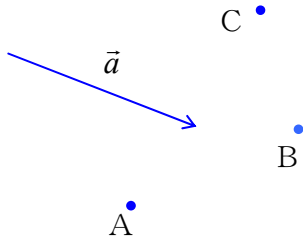
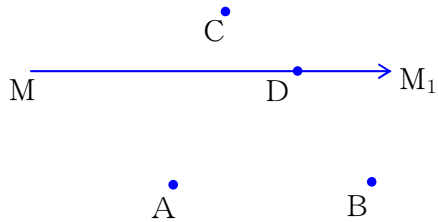



그림 1-21　　　　그림 1-22

3. 평행이동 $\overrightarrow{MM_1}$에 의해서 점 A, B, C, D가 넘어가는 점을 구하여라.(그림 1－22)

### 2) 평행이동의 성질

> 평행이동에 의해서 선분은 그에 평행이며 그와 같은 길이인 선분으로 넘어간다.

(증명) 평행이동을 $\overrightarrow{MM_1}$, 한 선분을 AB라고 하자.(그림 1－23)

$A\rightarrow A_1$, $B\rightarrow B_1$이라고 하면

$AA_1 \mathrel{\underline{/\!/}} MM_1$, $BB_1 \mathrel{\underline{/\!/}} MM_1$(평행이동의 정의)

$\therefore\ AA_1 \mathrel{\underline{/\!/}} BB_1$

그러므로 4각형 $ABB_1A_1$은 평행4변형이다.

$\therefore\ A_1B_1 \mathrel{\underline{/\!/}} AB$

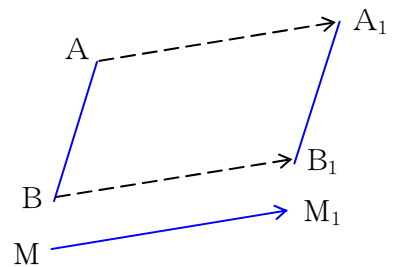



그림 1-23

평행이동에 의하여 반직선 또는 직선은 각각 그에 평행인 반직선 또는 직선으로 넘어간다.

또한 평행이동에 의해서 각은 같은 크기의 각으로 넘어간다.

**탐 구**

$\triangle ABC$를 평행이동 $\overrightarrow{AA_1}$에 의하여 $\triangle A_1B_1C_1$로 넘기였다. 평행이동의 성질을 써서 $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$이라고 말할수 있는가?

## 문 제

1. 평행이동 $\vec{a}$에 의해서 $\triangle ABC$를 평행이동하여라.(그림 1－24)

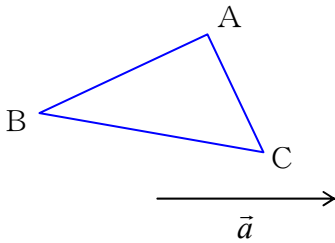
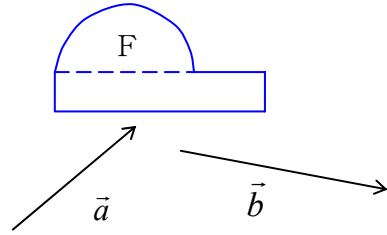



그림 1-24　　　　그림 1-25

2. 평행이동 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 의해서 도형 F가 넘어가는 도형을 각각 그려라.(그림 1－25)

평행이동은 실천에서 많이 쓰인다.

**례** 기슭이 서로 평행인 강의 한쪽에 점 B가 있고 다른쪽에 점 A가 있다.(그림 1－26) 기슭에 수직되게 다리 MN을 놓으려고 한다. A에서 B로 가는 길 AMNB를 가장 짧게 하려면 다리를 어디에 놓아야 하겠는가? 그림을 그려라.

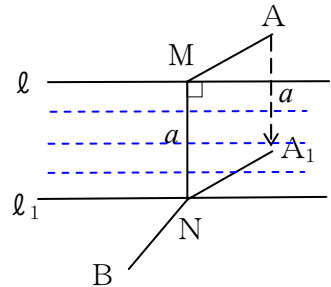



그림 1-26

(설명) 평행이동 $\overrightarrow{MN}$에 의해서 점 A를 $A_1$로 넘기면 $AM=A_1N$

$\therefore\ AM+MN+NB=A_1N+MN+NB$

여기서 MN은 일정하므로 이 합을 가장 작게 하면 된다.

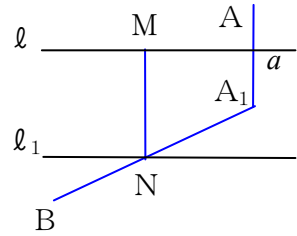
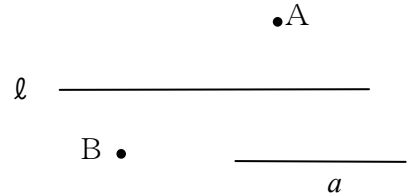
그것은 세 점 $A_1$, N, B가 한 직선에 놓일 때이다.

그리기

1) 기슭에 수직되게 강의 너비 $a$와 같은 선분 $AA_1$을 긋는다.(그림 1−27)
2) 선분 $A_1B$를 긋고 기슭 $\ell_1$과 사귀는 점을 N이라고 한다.
3) N에서 $\ell$에 수직선분 NM을 그으면 된다.

그림 1-27

그림 1-28

## 문 제

한 직선 $\ell$과 그 량쪽에 점 A, B가 있다.(그림 1−28) 직선 $\ell$에 정해진 길이 $a$와 같은 선분 MN을 긋는데 절선 AMNB를 가장 짧게 하려고 한다. 점 M, N을 어디에 찍어야 하겠는가? 그 점들을 구하여라.

## 4. 제 형

**한쌍의 맞은변이 서로 평행인 4각형을 제형이라고 부른다.**
**제형에서 평행인 두 변을 밑변, 나머지변을 옆변이라고 부른다.**

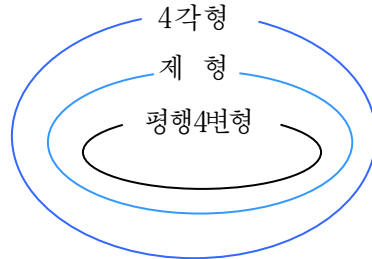
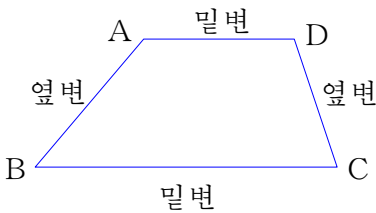



그림 1-29

두 옆변이 평행이 아니면서 서로 같은 제형을 **바른제형**이라고 부른다.
앞으로 제형과 평행4변형은 갈라볼 때도 있다.

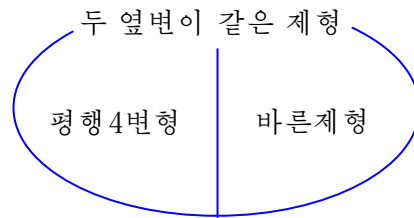
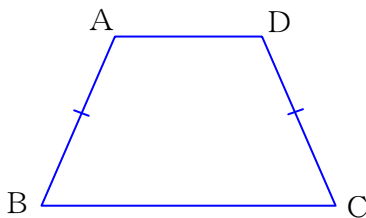



그림 1-30

## 문 제

1. 제형 ABCD(AD//BC)가 바른제형이면 ∠B=∠C이다. 증명하여라.
2. 제형 ABCD(AD//BC, AB∦CD)에서 ∠B=∠C이면 AB=DC이다. 증명하여라.(∦는 평행이 아니라는 기호이다.)

3. 바른제형에서 두 대각선은 서로 같다. 증명하여라.

**알아보기** 제형 ABCD에서 밑변 AD의 길이를 0(령)에로 가져가면 어떤 도형이 생기는가?

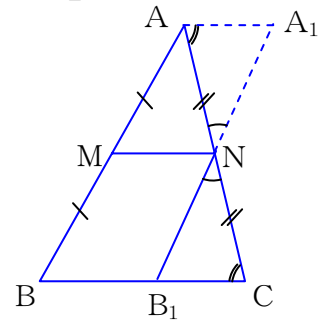
3각형 또는 제형에서 두 옆변의 가운데점을 맺는 선분을 중간선이라고 부른다.

**례** △ABC에서 중간선 MN은 밑변에 평행이며 $MN=\frac{1}{2}BC$이다.

조건. △ABC에서 $AM=MB$, $AN=NC$

결론. $MN /\!/ BC$, $MN=\frac{1}{2}BC$

그림 1-31

(증명) N을 지나 $AB /\!/ A_1N$인 직선과 A를 지나 $BC /\!/ AA_1$인 직선을 그어 사귐점 $A_1$을 얻자.
그러면 $\triangle B_1CN$과 $\triangle A_1AN$에서 $AN=NC$, $\angle C=\angle A_1AN$, $\angle B_1NC=\angle ANA_1$이므로 합동이다. 따라서 $A_1N=B_1N=\frac{1}{2}A_1B_1$

그런데 $AM=MB=\frac{1}{2}AB$, $AB=A_1B_1$이므로 $BM \underline{/\!/} B_1N$

따라서 $MBB_1N$은 평행4변형이다. 따라서 $MN /\!/ BC$

그리고 $MN=BB_1=AA_1=B_1C$이므로 $MN=\frac{1}{2}BC$

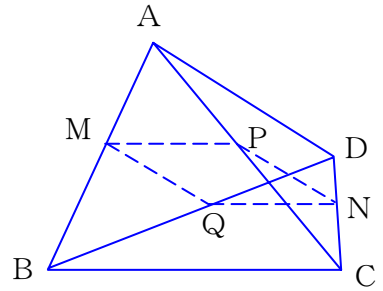
**탐 구**

제형 ABCD의 중간선 MN을 그었을 때 $MN \underline{/\!/} \frac{1}{2}(AD+BC)$이겠는가? 점 N을 지나 AB에 평행인 선 $B_1N$을 그어 AD의 연장선과 사귀는 점 $A_1$을 얻고 생각하여보아라.

정리 6. 1) 3각형의 중간선은 밑변에 평행이며 밑변의 절반과 같다.
2) 제형의 중간선은 밑변에 평행이며 두 밑변의 합의 절반과 같다.

## 문 제

그림 1-32

1. 3각형의 세 중간선을 다 그으면 3각형은 합동인 4개의 3각형으로 나누인다는것을 증명하여라.
2. 4각형 ABCD가 있다. 변 AB, BC, CD, DA의 가운데점을 각각 M, N, P, Q라고 하면 4각형 MNPQ는 평행4변형이다. 증명하여라.
3. 4각형 ABCD에서 맞은변 AB, CD와 대각선 AC, BD의 가운데점들을 각각 M, N, P, Q라고 하면 4각형 MPNQ는 평행4변형이다. 증명하여라.(그림 1−32)
4. AB<AC인 △ABC에서 변 BC의 가운데점을 M이라고 하고 ∠A의 2등분선에 B에서 내리 그은 수직선을 BN이라고 하면 $MN=\frac{1}{2}(AC-AB)$가 성립한다. 증명하여라.
5. AB<AC인 △ABC에서 ∠A의 2등분선에 정점 B, C에서 각각 수직선 BD, CE를 긋고 변 BC의 가운데점을 M이라고 하면 $MD=ME=\frac{1}{2}(AC-AB)$임을 증명하여라.

**정리 7. 3각형의 세 가운데선은 한 점에서 사귀며 그 점에서 각각 2:1로 나누인다.**

**조건.** △ABC에서 BD=DC, CE=EA, AF=FB
**결론.** ① AD, BE, CF는 한 점 G에서 사귄다.
② AG:GD=BG:GE=CG:GF=2:1

그림 1-33

**(증명)** △ABC에서 두 가운데선 BE, CF의 사귐점을 G라고 하자.
가운데선 AD도 점 G를 지나며 ②가 성립한다는것을 밝히자.
BG, CG의 가운데점을 각각 M, N이라고 하고 4각형 FMNE를 그리면 선분 FE, MN은 각각 △ABC, △GBC의 중간선이므로

$FE \parallel BC$, $FE=\frac{1}{2}BC$

$MN \parallel BC$, $MN=\frac{1}{2}BC$

∴ $FE \underline{\parallel} MN$

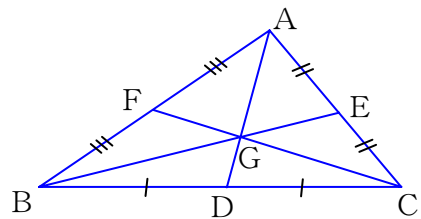
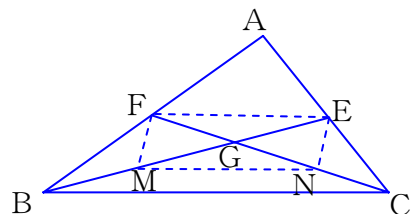



그림 1-34

그러므로 4각형 FMNE는 평행4변형이다.(정리 3)

$\therefore$ FG=GN, EG=GM

따라서 점 G는 가운데선 BE, CF를 각각 2:1로 나눈다.

이와 마찬가지로 가운데선 AD도 선분 BE를 2:1로 나누는 점 G를 지나며 이 점에서 2:1로 나누인다.(그림 1−35)

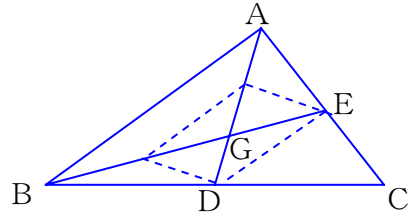



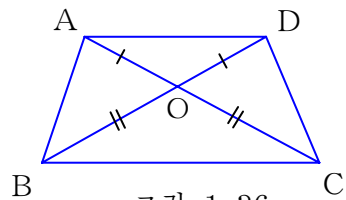
그림 1-35

**3각형의 세 가운데선이 사귀는 점을 3각형의 무게중심이라고 부른다.**

## 련습문제

1. 다음 문장에서 옳지 않은것이 있으면 고쳐보아라.
   1) 두 대각선이 같은 등변4각형은 바른4각형이다.
   2) 평행이동에 의하여 직선은 그에 평행인 직선으로 넘어간다.
   3) 정리가 옳으면 거꿀정리도 옳다.
   4) 대각선이 같은 평행4변형은 바른4각형이다.
2. 4각형 ABCD에서 AD//BC, AD=3cm, BC=5cm, $\angle$B=50°, $\angle$C=70°이다. 그 4각형을 그려라.
3. 4각형 ABCD에서 두 대각선의 사귐점을 O라고 할 때 OA=OD, OB=OC, OA≠OB이면 그 4각형은 바른제형이다. 증명하여라.(그림 1−36)

그림 1-36

4. 제형의 면적은 중간선에 높이를 곱한 적과 같다. 증명하여라.
5. △ABC의 무게중심 G를 그 세 정점과 각각 맺으면 그 면적이 3등분된다. 증명하여라.
6. 3각형 ABC의 바깥쪽에 변 AC, BC를 각각 변으로 하는 바른3각형 ACD, BCF를 만들었다. 또한 AB를 한 변으로 하는 바른3각형 ABE를 AB에 관하여 C와 같은쪽에 만들면 4각형 CDEF는 어떤 4각형인가?
7. ▱ABCD에서 큰 변 AD, BC의 가운데점을 각각 M, N이라고 하자. AC⊥MN이면 ANCM은 어떤 4각형인가?

8. 바른4각형 ABCD의 변 BC에 한 점 P를 정한다. 변 CD에 AP=BP+QD 되게 점 Q를 잡으면 AQ는 ∠DAP를 2등분한다. 증명하여라.

9. AD는 △ABC의 가운데선이고 E는 AD의 가운데점이다. BE의 연장선과 AC와의 사귐점을 F, D에서 BF에 평행되게 그은 직선이 AC와 만나는 점을 G라고 하면 AF=FG=GC임을 증명하여라.

## 복 습 문 제

1. 바른3각형을 하나 그리고 변 AC, BC에 각각 P, Q를 AP=CQ로 되게 찍어라. 이때 AQ와 BP를 비교하여라.

2. 선분 AB를 하나 긋고 그 선분에 한 점 C를 찍어라. 다음에 AB에 관하여 같은 쪽에 두 바른3각형 ACD와 BCE를 그려라. 이때 AE와 BD를 비교하여라.

3. 바른3각형 ABC를 그리고 변 BC에 한 점 D를 찍어라. 다음 바른3각형 ADE를 AD에 관하여 점 B의 반대쪽에 그려라. 이때 BD와 CE를 비교하여라.

4. △ABC에서 ∠C는 무딘각이고 ∠B가 제일 작은 각이다. 점 B, C에서 맞은 변에 세운 수직선에 각각 점 D, E를 찍되 BD=AC, CE=AB 되게 하면 △ADE는 직2등변3각형이다. 증명하여라.

5. △ABC를 하나 그리고 ∠A의 2등분선 AD를 그어라. 다음에 변 CA의 연장선에 AE=AB 되게 점 E를 찍어라. 이때 직선 BE와 AD는 서로 평행이라는것을 증명하여라.

6. △ABC를 하나 그려라. 원둘레 C(CB)가 직선 AB와 사귀는 점을 E라고 하고 점 F를 선분 BE와 AF가 같은 가운데점 M을 가지게 찍어라. 이때 △CAF는 무슨 3각형인가?

7. 직3각형 ABC의 빗변 BC의 가운데점 M을 지나며 BC에 수직인 직선을 긋고 ∠A의 바깥각의 2등분선과의 사귐점을 N이라고 하면 △MAN은 어떤 3각형인가?

8. 같은 중심을 가진 두 원둘레가 있다. 한 원둘레의 직경 AC와 다른 원둘레의 직경 BD가 서로 수직이다. 4각형 ABCD는 무슨 4각형인가?

9. 평행4변형 ABCD에서 AB, BC, CD, DA의 가운데점 E, F, G, H를 찍고 직선 AF, BG, CH, DE를 그었다.(그림 1-37)
이 네 직선은 한개의 평행4변형을 만든다는것을 증명하여라.

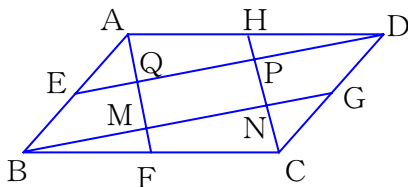



그림 1-37

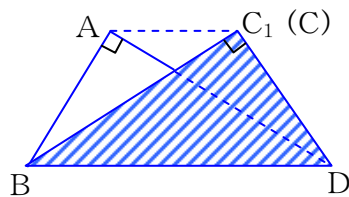



그림 1-38

10. 직4각형 ABCD의 종이로 그림 1−38과 같이 대각선 BD를 선분으로 하여 접고 정점 A와 $C_1$을 맺으면 4각형 $ABDC_1$은 바른제형이다. 증명하여라.

11. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 높이 AH를 긋고 점 H에서 직각변 AB와 AC에 각각 수직선을 그었다. 이 수직선의 밑점을 각각 M, N이라고 하면 두 점 M, N사이의 거리는 높이 AH와 같다는것을 증명하여라.

12. 한쌍의 맞은변 AB, DC가 같은 4각형 ABCD에서 맞은변 AD, BC의 가운데점을 각각 M, N이라고 하면 MN은 AB, DC와 같은 각을 이룬다. 증명하여라.

13. 제형 ABCD($AD /\!/ BC$)에서 AB=4cm, BC=5cm, CD=6cm, AD=2cm이다. 그 제형을 그려라. $\overrightarrow{AD}$에 의해서 AB를 평행이동하고 생각하여보아라.(그림 1−39)

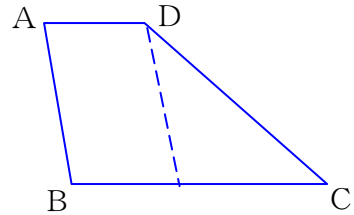



그림 1-39

14. 제형 ABCD($AD /\!/ BC$, $AB \not\parallel CD$)에서 대각선 AC=BD이면 그 제형은 바른제형이다. 증명하여라.

15. 제형 ABCD($AD /\!/ BC$)에서 중간선 MN=20cm이고 대각선 AC가 선분 MN을 3:2로 나눈다. 두 밑변의 길이를 구하여라.(그림 1−40)

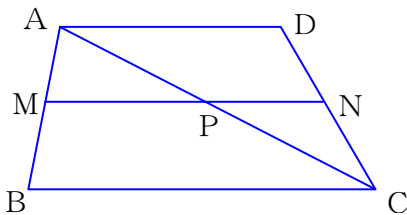



그림 1-40

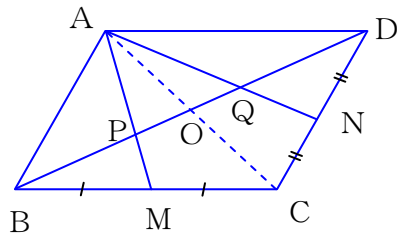



그림 1-41

16. 평행4변형 ABCD의 변 BC, CD의 가운데점을 각각 M, N이라고 하면 AM, AN은 대각선 BD를 3등분한다. 증명하여라.(그림 1−41)

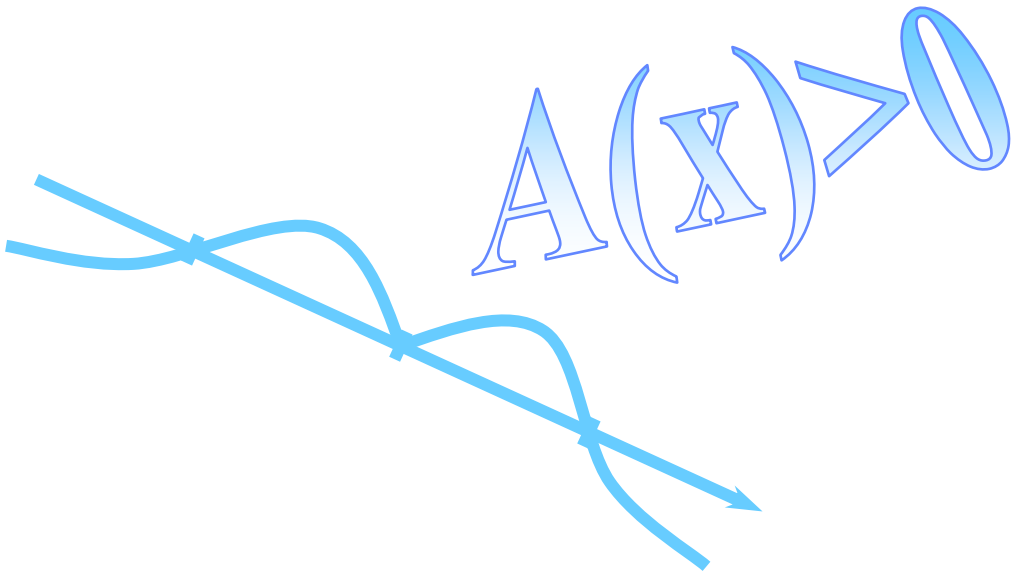
17. △ABC의 변 AB, AC의 바깥쪽에 바른4각형 ABDE, ACFG를 그리고 EG의 가운데점을 L, BC의 가운데점을 M이라고 하면 AM=EL, $AM \perp EG$이다. 증명하여라.

18. 4각형 ABCD에서 점 A를 지나며 BC에 평행인 직선을 긋고 점 B를 지나며 AC에 평행인 직선을 그어 그 두 직선이 사귀는 점을 E라고 하면 3각형 BDE의 면적은 4각형 ABCD의 면적의 몇배인가?

# 제2장. 여러마디식과 방정식

$$\frac{3x^3-8x^2+2x-1}{x-2}$$

여러마디식의 나누기

2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프와 2차방정식

## 제1절. 여러마디식의 나누기

### 1. 여러마디식의 나누기

찾기 수의 나누기과정을 보면서 □안에 알맞는 식을 찾아보아라.

여러마디식의 나누기도 수의 나누기와 류사한 방법으로 한다.

$(10x^3-41x^2+43x-9)\div(2x^2-7x+4)$의 계산과정을 보자.

$$
\begin{array}{rll}
 & 5x-3 & \leftarrow \text{상}(Q(x)) \\
B(x)\cdots\ 2x^2-7x+4\,) & 10x^3-41x^2+43x-9 & \cdots A(x) \\
 & 10x^3-35x^2+20x & \cdots B(x)\cdot 5x \\
 & -6x^2+23x-9 & \cdots A(x)-B(x)\cdot 5x \\
 & -6x^2+21x-12 & \cdots B(x)\cdot(-3) \\
 & 2x+3 & \cdots A(x)-B(x)\cdot 5x-B(x)\cdot(-3)
\end{array}
$$

$2x+3$ → 나머지$(R(x))$

> 여러마디식 $A(x)$를 $B(x)$로 나눈 상을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하면
>
> $$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$
>
> (여기서 $R(x)$의 차수는 $B(x)$의 차수보다 낮다.)
>
> $R(x)=0$이면 여러마디식 $A(x)$는 여러마디식 $B(x)$로 완제된다고 말한다.

**례 1** $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3}$ 를 계산하여라.

(풀이)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & +4x & +3 \\ \hline
x^2-4x+3\,) & x^4 & -10x^2 & & +9 \\
 & x^4-4x^3 & +3x^2 & & \\ \hline
 & 4x^3 & -13x^2 & & +9 \\
 & 4x^3 & -16x^2 & +12x & \\ \hline
 & & 3x^2 & -12x & +9 \\
 & & 3x^2 & -12x & +9 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

$$\frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3}=x^2+4x+3$$

**례 2** $\dfrac{5x^3-4x^2y+2xy^2-3y^3}{x-y}$ 의 분자, 분모를 $x$에 관한 여러마디식으로 보고 계산하여라.

(풀이)

$$\begin{array}{rrrr}
 & 5x^2 & +xy & +3y^2 \\ \hline
x-y\,) & 5x^3-4x^2y & +2xy^2 & -3y^3 \\
 & 5x^3-5x^2y & & \\ \hline
 & x^2y & +2xy^2 & \\
 & x^2y & -xy^2 & \\ \hline
 & & 3xy^2 & -3y^3 \\
 & & 3xy^2 & -3y^3 \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

$$\frac{5x^3-4x^2y+2xy^2-3y^3}{x-y}=5x^2+xy+3y^2$$

## 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $(2x^4-5x^3+x^2+x+3)\div(x^2-3x-4)$

2) $\dfrac{x^4-x^3-8x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$

3) $(4x^4-10x^3-3x^2+5x+1)\div(4x^2+2x-1)$

4) $(x^3-5x^2-x-10)\div(4x^2+2x-1)$

5) $(x^4-7x^2)\div(x^2+6x-5)$

6) $\dfrac{5x^4-4x^3+2x-1}{x^3-x-1}$

2. $3x^3-8x^2-5x+1$을 $x-2$로 나눈 상이 $3x^2-2x-9$이다. 나머지를 구하여라.

3. $4x^4+13x-9$를 나눈 상이 $x^2+x-1$이고 나머지가 $x-1$이다. 나누는 식을 구하여라.

4. A($x$)를 B($x$)로 나눈 상이 $a$(상수)이면 (  )이다.

1) A($x$)의 차수가 B($x$)의 차수보다 크다.

2) A($x$)의 차수가 B($x$)의 차수보다 크지 않다.

3) A($x$)의 차수와 B($x$)의 차수는 같다.

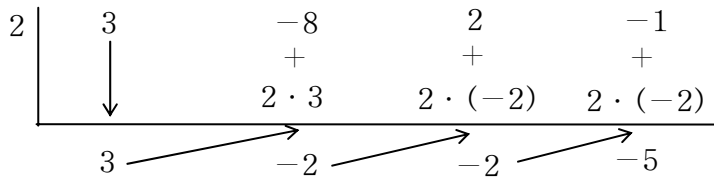
4) 확정할수 없다.

**여러마디식 P($x$)를 $x-a$로 나눌 때 상과 나머지를 구하는 간단한 방법**

$(3x^3-8x^2+2x-1)\div(x-2)$의 계산과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2-2x-2 \\
x-2 & 3x^3-8x^2+2x-1 \\
 & 3x^3-6x^2 \\ \hline
 & \quad -2x^2+2x \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ -2=-8+(2\cdot 3) \\
 & \quad -2x^2+4x \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ -2x^2+4x \\ \hline
 & \qquad -2x-1 \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ -2=2+2\cdot(-2) \\
 & \qquad -2x+4 \\ \hline
 & \qquad\quad -5 \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ -5=-1+2\cdot(-2)
\end{array}$$

이 과정을 도식화하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & -8 & 2 & -1 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
 & & 2\cdot 3 & 2\cdot(-2) & 2\cdot(-2) \\ \hline
 & 3 \nearrow & -2 \nearrow & -2 \nearrow & -5
\end{array}$$

여기서 3, −2, −2는 상의 매 마디의 결수들이고 −5는 나머지이다.
일반적으로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)\div(x-a)$$

에서 상이 $(b_0x^2+b_1x+b_2)$, 나머지가 $b_3$이라면

$$\begin{array}{c|cccc}
a & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
 & & ab_0 & ab_1 & ab_2 \\ \hline
 & a_0=b_0 \nearrow & b_1 \nearrow & b_2 \nearrow & b_3
\end{array}$$

이 도식을 호너의 도식이라고 부른다.

례 3 다음의 식을 계산하여라.

$$(x^3+x^2-14x-29)\div(x+2)$$

(풀이)

| −2 | 1 | 1 | −14 | −29 |
|---|---|---|---|---|
| | | −2 | 2 | 24 |
| | 1 | −1 | −12 | −5 |

따라서 상은 $x^2-x-12$, 나머지는 $-5$

## 문 제

다음의 식을 계산하여라.(1−2)

1. 1) $(x^4-3x^3+2x^2+x-10)\div(x-2)$  2) $\dfrac{x^3-4x^2+5x+2}{x+3}$

   3) $\dfrac{x^2-7ax-6a^3}{x-2}$

2. 1) $(x^3-5x^2+7x-2)\div(x-2)$  2) $(5x^3-7x^2-12x-3)\div(x-3)$

   3) $(x^3-7x^2+14x-8)\div(x-1)$

3. $x^3-3x^2+ax-6$을 $x-2$로 나눌 때 나머지가 6이다. $a$를 구하여라.

## 2. 나머지정리와 인수정리

알아보기 1. $A(x)=x^2-4$는 $x-2$로 완제된다. 이때 $A(2)$, $A(-2)$는 얼마인가?

2. $A(x)=x^3+x^2-14x-29=(x^2-x-10)(x+2)-5$에서 $A(-2)$와 나머지 $-5$를 비교해보아라.

$x$에 관한 여러마디식 $A(x)$에서 $x$에 $a$를 갈아넣는것을 $A(a)$로 표시하기로 한다.

**정리 1. (나머지정리) 여러마디식 $A(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $A(a)$와 같다. 즉**

$$A(x)=(x-a)Q(x)+R \Rightarrow R=A(a)$$

(증명) 여러마디식 $A(x)$를 $x-a$로 나눈 상을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$$A(x)=(x-a)Q(x)+R$$

$x=a$일 때 $A(x)$의 값은

$$A(a)=(a-a)Q(a)+R=R$$

**례 1** $A(x)=x^3-5x^2-4x+2$를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하여라.

(풀이) 나머지정리에 의하여

$$R=A(2)=2^3-5\cdot 2^2-4\cdot 2+2=8-20-8+2=-18$$

## 문 제

1. 다음것을 구하여라.
   1) $A(x)=x^3+5x^2-4x+2$를 $x+5$로 나눈 나머지
   2) $B(x)=2x^4-5x+3$을 $x-3$으로 나눈 나머지
2. $A(x)=2x^3+ax^2+46x+b$를 $x-1$, $x-5$로 나눈 나머지가 0이다. $a$, $b$를 구하여라.
3. $a^{73}+b^{73}$은 $a+b$로 완제된다는것을 증명하여라.
4. $a^{13}-b^{13}$은 $a-b$로 완제된다는것을 증명하여라.
5. $x$에 관한 3차여러마디식을 $x^2-1$로 나누면 나머지가 $2x-4$이고 $x^2-9$로 나누면 나머지가 $10x-20$이다. 이 3차여러마디식을 구하여라.

**알아보기** $A(x)=x^3-3x^2+3x-9$에서 $A(3)=0$이다. 만일 $A(3)\neq 0$이면 $A(x)$가 $x-3$으로 완제되겠는가?

> 정리 2. (인수정리) 여러마디식 $A(x)$에서 $A(a)=0$이면 $A(x)$는 인수 $x-a$를 가진다. 거꾸로도 성립한다. 즉
>
> $$A(a)=0 \Leftrightarrow A(x)=(x-a)Q(x)$$

여기서 A ⇔ B는 A이면 B이고 B이면 A이다를 나타내는 기호이다.

(증명) $A(x)=(x-a)Q(x)+R$에서 $A(a)=0$이면 나머지정리에 의하여 $R=0$이다.

그러므로 $A(x)=(x-a)Q(x)$

거꾸로 $A(x)=(x-a)Q(x)\Rightarrow A(a)=0$

**례 2** $A(x)=3x^5-224x^3+742x^2+5x+50$은 $x-5$를 인수로 가지는가?

(풀이) 인수정리를 직접 쓰자면 계산량이 많다. 그러므로 호너의 도식에 의하여 $A(x)$를 $x-5$로 나눌 때의 나머지를 구해본다.

| 5 | 3 | 0 | −224 | 742 | 5 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 15 | 75 | −745 | −15 | −50 |
| | 3 | 15 | −149 | −3 | −10 | 0 |

인수정리에 의하여 $A(x)$는 $x-5$를 인수로 가진다.

문 제

1. $A(x)=6x^4+5x^3-38x^2+5x+6$일 때 다음 식들가운데서 $A(x)$의 인수로 되는것을 찾아보아라.

$$x+1, \quad x-2, \quad x+3, \quad x-4$$

2. 여러마디식 $x^4+x^3-10x^2+ax+b$는 $x-2$와 $x-3$으로 완제된다. $a$, $b$를 구하여라.
3. 다음의 사실을 증명하여라.
   1) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$은 $a+b$로 완제된다. $(n\in N)$
   2) $a^{2n}-b^{2n}$은 $a+b$로 완제된다. $(n\in N)$

## 3. 여러마디식의 인수분해

**알아보기** 결수가 옹근수인 여러마디식 $A(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$에서 $A(a)=0$

이면 $a_0a^3+a_1a^2+a_2a+a_3=0$

이때 $a$가 상수마디 $a_3$의 약수라고 말할수 있는가?

결수가 옹근수인 여러마디식 $A(x)$에서 $A(a)=0$이면 옹근수 $a$는 상수마디의 약수이다.

**례 1** 여러마디식 $A(x)=x^3-5x+4$에서 상수마디 4의 약수들은 $\pm1$, $\pm2$, $\pm4$

$$A(1)=1^3-5\cdot1+4=0$$

따라서 $A(x)$는 $x-1$로 완제된다. 즉 $x-1$을 인수로 가진다.

**옹근수결수를 가진 여러마디식 $A(x)$의 인수 $x-a$ 구하기**

① 상수마디의 약수들을 모두 찾는다.
② $x$ 대신에 이 약수들을 넣어 $A(x)=0$으로 되는것이 있으면 하나를 선택한다.
③ $A(x)$를 $(x-a)B(x)$모양으로 분해한다.
④ $B(x)$를 다시 $(x-b)C(x)$모양으로 분해할수 있으면 분해한다.

**례 2** $A(x)=x^3+x^2-14x-24$를 인수분해하여라.

(풀이) $-24$의 약수 $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$, $\pm4$, $\pm6$, $\pm8$, $\pm12$, $\pm24$

$$A(-2)=(-2)^3+(-2)^2-14(-2)-24=-8+4+28-24=0$$

| $-2$ | 1 | 1 | $-14$ | $-24$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $-2$ | 2 | 24 |
| | 1 | $-1$ | $-12$ | 0 |

$$A(x)=(x+2)(x^2-x-12)=(x+2)(x-4)(x+3)$$

### 문 제

1. 다음 여러마디식을 인수분해하여라.

   1) $x^4-x^3-7x^2+x+6$　　2) $x^4-2x^3-x^2+2$　　3) $4x^4-3x^2-1$

2. 다음 방정식의 옹근수풀이를 구하여라.

   1) $x^3+3x^2+6x+4=0$　　2) $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$

   3) $x^3-2x^2-x-6=0$

3. 다음 여러마디식을 인수분해하여라.

   1) $a^5+b^5$　　2) $a^9-b^9$　　3) $a^{2n}-b^{2n}$

   4) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$　　5) $a^{2n-1}-b^{2n-1}$

4. $x$에 관한 여러마디식 $f(x)$가 $x-\alpha$ 및 $x-\beta$로 나머지없이 나누어지면 $f(x)$는 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나머지없이 나누어진다. $(\alpha\neq\beta)$ 증명하여라.

5. $a$, $b$, $c$가 어떤 값을 가질 때 여러마디식 $x^4+ax^2+bx+c$가 $(x-1)^3$으로 나머지없이 나누어지겠는가?

6. $x$에 관한 3차여러마디식 $x^3+px-10$이 $x^2+4x+q$로 나머지없이 나누어지기 위해서는 $p$, $q$가 어떤 값을 가져야 하는가?

7. $x^2+ax-12$가 2개의 옹근수결수1차식의 적으로 인수분해될 때 조건에 맞는 옹근수 $a$의 개수는 (　 )이다.

   1) 3　　2) 4　　3) 6　　4) 8

## 련 습 문 제

1. 다음 식을 계산하여라.

   1) $(2x^4+3)\div(x^2-2x+7)$　　2) $(-9x^2-x+7)\div(x-3)$

   3) $(x^6+8x^5+12x^4-2x^3+9x+18)\div(x^2+2x-3)$　　4) $(x^5-4x^3+7x^2+5)\div(x+2)$

2. $x$에 관한 여러마디식을 $x-7$로 나누면 나머지가 13이고 $x-9$로 나누면 나머지가 17이다. 이 여러마디식을 $(x-7)(x-9)$로 나누면 나머지는 얼마인가?

3. $x$에 관한 3차여러마디식을 $x+1$, $x$, $x-1$, $x-2$로 나누면 나머지는 각각 $-1$, $-2$, 1, 2이다. 이 3차여러마디식을 구하여라.

4. 만일 식 $ax^5+bx^3+cx-5$이 $x=-2$일 때 값이 7이면 $x=2$일 때는 값이 얼마인가?

5. 만일 $x^2-x+1$이 $ax^3+bx+1$의 한개 인수식이라면 $b$의 값은 얼마인가?

6. $x$에 관한 여러마디식 $\mathrm{A}(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눌 때 나머지는

$$\frac{\mathrm{A}(a)-\mathrm{A}(b)}{a-b}x+\frac{a\mathrm{A}(b)-b\mathrm{A}(a)}{a-b}$$ 라는것을 증명하여라.

7. $m$, $n$이 얼마일 때 여러마디식 $x^4-5x^3+11x^2+mx+n$이 $x^2-2x+1$로 완제되겠는가?

8. 다음 식을 인수분해하여라.

   1) $x^4-3x^3+x^2+3x-2$　　2) $x^3+6x^2+11x+6$　　3) $x^{10}+2x^5+1$

## 제2절. 2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프와 2차방정식

### 1. 2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프

2차식 $y=ax^2+bx+c$에 $x$의 값을 주면 $y$가 정해진다. 이때 점 $(x, y)$들의 모임을 2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프라고 부른다.

2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프도 1차식 $y=ax+b$의 그라프를 그리는것과 류사한 방법으로 그린다.

**례 1** $y=x^2$의 그라프를 그려라.

(풀이)

| $x$ | … | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | … | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | … |

자리표평면에 점 …, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, …들을 찍고 미끈한 선으로 이으면 그리려는 곡선이 얻어진다.(그림 2－1)

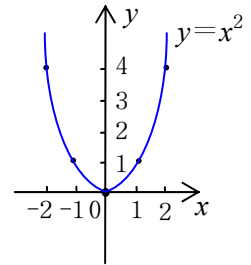



그림 2-1

$y=x^2$의 그라프를 $y$축방향으로 평행이동하면 $y=x^2+2$의 그라프가 얻어진다고 말할수 있는가?

매 $x$점에서 $x^2+2$와 $x^2$의 차가 어떤가?

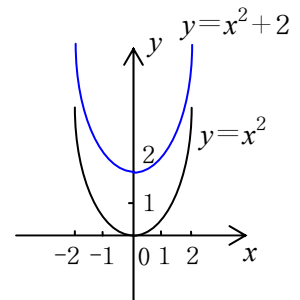



그림 2-2

> 2차식 $y=x^2+a$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프를 $y$축에서 $a$만큼 평행이동하면 얻어진다.

### 문 제

다음 2차식의 그라프를 그려라.

1) $y=x^2+3$　　　　2) $y=x^2-5$

**탐 구**

1) $y=-x^2$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프와 어떤 관계에 있는가?
2) $y=-x^2+2$, $y=-x^2-3$의 그라프는 어떻게 그리면 되겠는가?

**례 2** $y=x^2+4x+3$의 그라프를 그려라.

(풀이) $(x, y)$의 표를 만들면 다음과 같다.

| $x$ | … | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | … | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 | … |

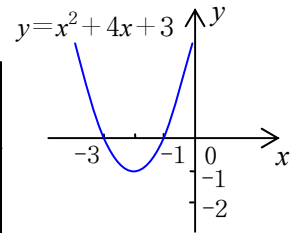



그림 2-3

점 $(x, y)$를 찍고 미끈한 선으로 이으면 그림과 같은 그라프가 얻어진다.

임의의 2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 이런 방법으로 그리면 된다.

### 문 제

다음 2차식의 그라프를 그려라.

1) $y=-x^2-4x+3$ 2) $y=x^2+4$ 3) $y=-x^2-4x$

## 2. 2차방정식과 2차안같기식

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$모양으로 표시되는 방정식을 **2차방정식**이라고 부른다.

여기서 $a$, $b$, $c$는 상수이다.

### 1) $x^2+a=0$모양의 2차방정식

**례 1** $x^2-4=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2-4=0$

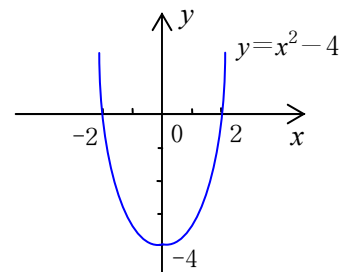
$x^2=4$

따라서 $x=2$, $x=-2$

풀이모임 $\{-2, 2\}$

그림 2-4

2차식 $y=x^2-4$의 그라프를 그리면 그림 2−4와 같다.

이때 $x$축과의 사귐점의 $x$자리표는 $-2$와 2이다.

**례 2** $x^2+4=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2+4=0$

$x^2=-4$

0 아닌 어떤 수를 2제곱하면 늘 정수이므로 $-4$가 될수 없다.

즉 방정식 $x^2+4=0$은 풀이가 없다.

$y=x^2+4$의 그라프를 그리면 그라프는 $x$축과 사귀지 않는다.

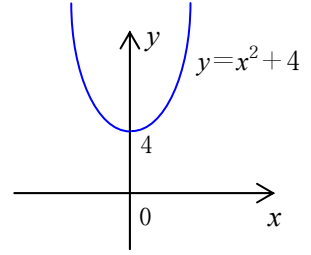
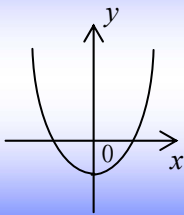
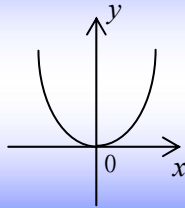
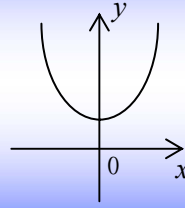



그림 2-5

2차식의 그라프와 $x$축과 사귀는 점의 수는 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이의 개수와 같다.

풀이는 2개

풀이는 1개

풀이는 없다

## 문 제

다음 2차방정식을 풀어라.

1) $x^2-36=0$　　2) $2x^2-18=0$　　3) $3x^2-48=0$

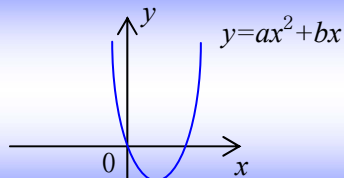
### 2) $x^2+bx=0$모양의 방정식

**례 3** $x^2+5x=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0$

$x=0$, $x+5=0$

즉 $x=0$, $x=-5$

$ax^2+bx=0\,(a,\ b\neq0)$모양의 방정식은 늘 풀이가 있다.

$y=ax^2+bx\,(a,\ b\neq0)$의 그라프는 늘 $x$축과 두 점에서 사귄다.

## 문 제

다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2+3x=0$　　2) $3x^2+7x=0$

3) $-9x^2+5x=0$　　4) $-5x^2-27x=0$

**$x^2=bx+c$모양의 2차방정식은 그라프로 풀수도 있다.**

**례 4** $x^2-3x+2=0$을 그라프로 풀어라.

(풀이) 주어진 방정식을 $x^2=3x-2$로 놓고 $y_1=x^2$, $y_2=3x-2$로 표시하자.

두 그라프의 사귐점은 (1, 1), (2, 4)이다.

$x=1$, $x=2$일 때 $x^2=3x-2$이다.

따라서 $x=1$, $x=2$는 주어진 방정식의 풀이이다.

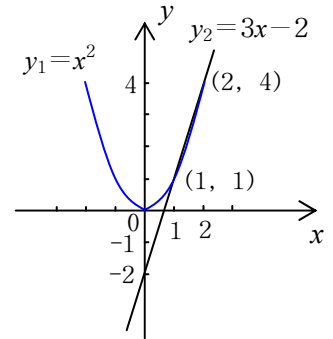



그림 2-6

## 문 제

다음 방정식을 두 그라프의 사귐점을 구하는 방법으로 풀어라.

1) $x^2-5x+6=0$　　2) $x^2+3x+2=0$

### 3) 인수분해된 안같기식의 풀이

인수분해된 안같기식은 그라프를 대강 그리면 풀이를 쉽게 구할수 있다.

**례 5** 안같기식 $(x+2)(x-2)\geq 0$의 풀이를 구하여라.

(풀이) $y=(x+2)(x-2)$의 그라프는 $x$축과 $x=-2$, $x=2$에서 사귄다.

$(x+2)(x-2)$의 값은 $x<-2$에서 정수, $-2<x<2$에서 부수, $x>2$에서 정수라는것을 알수 있다.

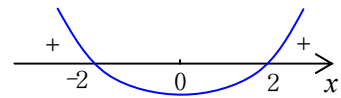



그림 2-7

그리하여 $y=(x+2)(x-2)$의 그라프를 대강 그리면 그림 2-7과 같다.

따라서 $(x+2)(x-2)\geq 0$인 $x$는 $(-\infty,\ -2]$, $[2,\ +\infty)$이다.

풀이모임 $(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)$

례 6 안같기식 $x^3-3x+2\geq 0$을 풀어라.

(풀이) $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$을 생각하자.

$y=(x-1)^2(x+2)$의 그라프는 $x$축과 $x=-2$, $x=1$에서 사귄다.

여기서 $(x-1)^2\geq 0$이므로 $x>1$에서 $(x-1)^2(x+2)$의 값은 $x<-2$일 때에만 부수이고 $-2<x<1$, $x>1$일 때에는 정수이다.

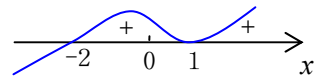
그리하여 $y=x^3-3x+2$의 그라프를 대강 그리면 그림 2-8과 같다. 따라서

$(x-1)^2(x+2)\geq 0$의 풀이모임은 $[-2, +\infty)$

그림 2-8

## 문 제

다음 안같기식의 그라프를 대강 그리고 풀어라.

1) $4(x+3)(x-1)\geq 0$ 2) $-\dfrac{3}{4}(x-2)(5x+1)^2\geq 0$ 3) $-2(x+1)(2x-1)(x-3)\geq 0$

탐 구

$(x-9)(x^2+x+1)>0$의 풀이를 구하여라.

## 련 습 문 제

1. 다음 방정식을 풀어라.
   1) $x^2-81=0$ 2) $3x^2-12=0$ 3) $3x^2-75=0$ 4) $-5x^2+180=0$
2. 다음 방정식을 풀어라.
   1) $x^2-x=0$ 2) $x^2+x=0$ 3) $x^2-2x=0$ 4) $x^2+2x=0$
3. 그라프를 그려서 다음 방정식의 풀이의 개수를 구하여라.
   1) $x^2+7x=0$ 2) $2x^2+4x+1=0$ 3) $2x^2-4x-1=0$
4. 다음 안같기식을 풀어라.
   1) $(3x+1)(2x-3)\geq 0$ 2) $4(2x-3)(5x-7)\leq 0$ 3) $(2x-1)^2(3x+5)^3\geq 0$

## 복 습 문 제

1. 다음과 같이 말하면 옳은가?

   1) 《3차여러마디식을 1차여러마디식으로 나눈 상은 2차여러마디식이고 나머지는 상수이다.》

   2) 《3차여러마디식을 2차여러마디식으로 나눈 나머지는 늘 1차여러마디식이다.》

   3) 《여러마디식 $A(x)$가 $(x-a)$로 완제되면 $A(x)$는 $(x-a)$로 인수분해된다.》

   4) 《옹근수 $a$가 여러마디식 $A(x)$의 상수마디의 약수이면 $A(x)$는 $(x-a)$로 완제된다.》

   5) 《여러마디식 $A(x)$가 $(x-a)(x-b)$로 완제되면 $A(a)=A(b)$이다.》

   6) 《$-2(x-2)^2(x+1)^4>0$의 풀이모임은 빈모임이다.》

2. 다음 식을 계산하고 그것을 주어진 식과 상, 나머지사이의 관계식으로 표시하여라.

   1) $(3x^4+5x+2)\div(x^2-2x+1)$  2) $\dfrac{x^4-3x^2+x-9}{x^3-x+2}$

3. $x$에 관한 여러마디식 $A(x)$를 $ax-b$로 나눈 나머지는 $x=\dfrac{b}{a}$일 때 $A(x)$의 값과 같다는것을 증명하여라. 즉

$$A(x)=(ax-b)Q(x)+R\Rightarrow A\left(\frac{b}{a}\right)=R$$

4. $x$에 관한 여러마디식 $A(x)$의 $x=\dfrac{b}{a}$에서의 값이 0이면 $A(x)$는 인수 $ax-b$를 가진다는것을 증명하여라. 즉

$$A\left(\frac{b}{a}\right)=0\Rightarrow A(x)=(ax-b)Q(x)$$

5. $A(x)=x^4-5x^3-x^2+ax+b$가 $x^2-5x-6$으로 완제된다. $a$와 $b$의 값을 구하여라.

6. 여러마디식 $A(x)$를 $x^2-1$로 나누면 상이 $x$, 나머지가 $3x-5$이다. $x-1$로 나누면 나머지가 얼마이겠는가?

7. 여러마디식 $A(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 3이고 그 상을 $x+3$으로 나누면 나머지가 $-1$이다. $A(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 얼마인가? 또 $x^2+x-6$으로 나눈 나머지를 구하여라.

8. 다음 여러마디식을 인수분해하여라.

   1) $x^3-5x^2+4$  2) $x^4+2x^3-3$

   3) $x^5-2x^3-1$  4) $x^5+x^4-9x^3-5x^2+16x+12$

9. 여러마디식 $A(x)=x^4-x^3+kx^2-2kx-2$(결수는 옹근수)가

1) $x-a$ 모양의 인수를 가지도록 $k$의 값을 정하고 인수분해하여라.

2) $x^2+ax+b$ 모양의 인수를 가지도록 $k$의 값을 정하고 인수분해하여라.

10. 다음 2차방정식을 풀어라.

1) $3x^2-75=0$　　2) $2x^2+50x=0$

3) $5x^2+155x=0$　　4) $-3x^2+125x=0$

11. 2차식의 그라프를 써서 다음 2차방정식의 풀이의 개수를 구하여라.

1) $x^2+2x-7=0$　　2) $x^2-9x+5=0$

12. 다음 안같기식을 그라프로 풀어라.

1) $x^2+3x-10>0$　　2) $x^2-3x-10>0$

3) $x^2+4x-12>0$　　4) $x^2-4x-12>0$

13. 3차여러마디식 $A(x)$가 $x+2$로 완제되고 $(x-1)^2$로 나눈 나머지가 $-9$, $A(-1)=3$이다. $A(x)>0$의 풀이를 구하여라.

### 아직도 풀리지 않은 문제—씨수분포문제

씨수분포문제란 씨수들을 크기의 순서에 따라 모두 찾아내는 문제이다. 이미 2천여년전에 유클리드에 의하여 씨수는 무수히 많다는것이 증명되였다. 또한 1998년에 씨수를 찾는 여러마디식도 발견되였다.

이 여러마디식은 25차26변수실수결수를 가진 여러마디식인데 이 여러마디식을 가지고 모든 씨수들을 크기의 순서에 따라 모두 찾을수 있는것은 아니다. 다만 변수들에 임의의 옹근수값을 넣을 때 씨수들이 얻어질뿐이다.

씨수분포문제는 아직까지 풀리지 않은 유명한 문제로 남아있다.

이 문제는 2077년에 해결될것으로 보고있다.

# 제3장. 유리식

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$$

분수식
분수식의 계산
갈기식과 안갈기식의 증명

## 제1절. 분수식

### 1. 옹근식

수나 변수들사이에 더하기나 덜기, 곱하기가 들어있는 식을 옹근식이라고 부른다.

**례 1** $2ab$, $a(a+3)$, $ax+by$, $a^2b(2+a)^2$, $(x+1)(x^2-1)$ 등은 다 옹근식이다.

$\frac{a+b}{2x}$ 는 옹근식이 아니다.

(주의) 수로의 나누기가 들어있는 식 $\frac{3x+1}{2}$ 은 그 수의 거꿀수와의 곱하기 $\frac{1}{2}(3x+1)$ 과 같으므로 옹근식에 넣는다.

여러마디식이 아닌 옹근식은 다 여러마디식으로 고칠수 있다.

**례 2** 1) $3a^2+2a(a-1)=3a^2+2a^2-2a=5a^2-2a$

2) $2a(a^2+3)=2a^3+6a$

3) $(3x-y)^3=27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$

4) $(7a+b)(9a^2-7ab+b^2)=63a^3-49a^2b+7ab^2+9a^2b-7ab^2+b^3$

$=63a^3-40a^2b+b^3$

### 문 제

1. 다음 식에서 옹근식을 골라내여라.

1) $7ab$　　2) $a(a-3)$　　3) $\frac{x}{3}$

4) $\frac{x}{65}$　　5) $\frac{x^2-3x+1}{4}$　　6) $\frac{x^2-y}{x+y}$

2. 다음 옹근식을 여러마디식으로 고쳐라.

1) $3x^2(2x+1)$　　2) $2ab(a+3b)^3$　　3) $a^2b(a+2)^3$

4) $ab^2(3-2a)^3$　　5) $(x^2-x+2)(3x^2+2x-4)$　　6) $(2x^2+x-3)-4x(x-1)$

3. 다음 옹근식을 인수분해하여라.

1) $x^2+5x+6$　　2) $4a^2-9b^2$

3) $x^2+x-6-(x-2)^2$　　4) $x^2y-xy^2$

옹근수에서와 마찬가지로 옹근식의 약수, 배수를 생각한다.

옹근식 A, B에 대하여

$$A = B \cdot C$$

인 옹근식 C가 있을 때 B를 A의 약수, A를 B의 배수라고 부른다.

(주의) A=1・A=A・1이므로 1은 모든 옹근식의 약수로 본다. 1은 그자체의 약수이다. A도 그자체의 약수이다.

례 3 $x^2-1=(x+1)(x-1)$ 이므로

$x+1$은 $x^2-1$의 약수

$x^2-1$은 $x+1$의 배수이다.

$x^2-1$자체도 약수이다.

례 4 다음 옹근식의 약수를 다 써라.

1) $x(x^2-1)$　　2) $2(x+1)^3$

(풀이) 1) $x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$ 이므로 그의 약수는

$1,\ x,\ x+1,\ x-1,\ x(x+1),\ x(x-1),\ x^2-1,\ x(x^2-1)$

2) $1,\ 2,\ x+1,\ (x+1)^2,\ (x+1)^3,\ 2(x+1),\ 2(x+1)^2,\ 2(x+1)^3$

## 문 제

1. 다음것이 옳은가?

1) $x+1$은 $x^3-1$의 약수　　2) $x-1$은 $x^3-1$의 약수

3) $x^2-9$는 $x-3$의 배수　　4) $x^2-9$는 $x+3$의 배수

5) $x^3+1$은 $x+1$의 배수　　6) $x^3+1$은 $x^3+1$의 약수

2. 다음 옹근식의 약수를 다 구하여라.

1) $x^3$　　2) $xyz$　　3) $(x+3)(x-4)$

4) $(x+y)^2$　　5) $(x+y)(x-y)^2$　　6) $a(a+b)(a-b)^2$

3. 다음 옹근식의 약수를 구하여라.

1) $x^2-16$　　2) $x^2+7x+12$　　3) $x^2-5x+6$

4) $a^2-3a-4$　　5) $3a^2+5a-2$　　6) $6x^2+7xy-3y^2$

옹근식에서도 옹근수에서와 비슷하게 공통약수와 공통배수를 생각한다.

**찾기** 두 옹근식 $x^2y$, $xy^2$의 공통약수와 공통배수를 찾아보아라.

> 몇개의 옹근식들의 공통약수들가운데서 차수가 제일 높은것을 그 옹근식들의 최대공통약수라고 부른다.
>
> 그리고 공통배수가운데서 차수가 제일 낮은것을 최소공통배수라고 부른다.

옹근식들의 최대공통약수와 최소공통배수도 옹근수에서와 비슷한 방법으로 구할수 있다.

**례 5** $12x^2y^3$과 $18x^4yz$의 최대공통약수와 최소공통배수를 구하여라.

(풀이) $12x^2y^3 = 2\cdot\boxed{2\cdot 3}\cdot\boxed{x^2\cdot y}\cdot y^2$

$18x^4yz=\boxed{2\cdot 3}\cdot 3\cdot\boxed{x^2\cdot y}\cdot x^2\cdot z$

이므로 최대공통약수는 $\boxed{2\cdot 3}\cdot\boxed{x^2y}=6x^2y$ 이다.

$12x^2y^3=\boxed{2^2}\cdot 3\cdot x^2\cdot\boxed{y^3}$

$18x^4yz=2\cdot\boxed{3^2}\cdot\boxed{x^4}\cdot y\cdot\boxed{z}$

이므로 최소공통배수는 $2^2\cdot 3^2\cdot x^4\cdot y^3\cdot z=36x^4y^3z$

**례 6** 다음 두 옹근식의 최대공통약수와 최소공통배수를 구하여라.

$6(x+1)^2$,　　　$20(x^2-1)$

(풀이) $6(x+1)^2=\boxed{2}\cdot 3\cdot(x+1)^2$

$20(x^2-1)=2^2\cdot 5\boxed{(x+1)}(x-1)$ 이므로 최대공통약수는 $2(x+1)$

$6(x+1)^2=2\cdot\boxed{3}\boxed{(x+1)^2}$

$20(x^2-1)=\boxed{2^2}\cdot\boxed{5}(x+1)\boxed{(x-1)}$

이므로 최소공통배수는 $2^2\cdot 3\cdot 5(x+1)^2(x-1)=60(x+1)^2(x-1)$

## 문 제

1. 다음 식이 옳으면 ○, 옳지 않으면 ×로 표시하여라.
   1) $24x^3y^2$, $18y^3$, $30xy^4z$의 최대공통약수는 $30x^3y^2z$
   2) $ab^2(a+b)$, $2a^2b(a+b)^2$, $a^2b^2(a^2-b^2)$의 최대공통약수는 $2a^2b(a+b)^2(a-b)$
   3) $x^2-2x+1$, $x^2-7x+6$, $2x^2+x-3$ 의 최소공통배수는 $(x-1)^2(x-6)(2x+3)$
   4) $x^2-3x-4$, $2x^2-x-3$, $6x^2+x-5$ 의 최소공통배수는 $(x-4)(x+1)(2x-3)(6x-5)$

**2.** 다음 옹근식들의 최대공통약수를 구하여라.

1) $x^2y^3$, $x^3y^2$ 2) $4x^2y$, $12xy^2$ 3) $12abc$, $18a^2bc$

4) $16a^2b^2$, $24a^4bc$ 5) $24x^3y^2$, $18y^3$, $30xy^4z$

6) $6ab^2$, $8ab(a-b)$ 7) $ab^2(a+b)$, $2a^2b(a+b)^2$, $a^2b^2(a^2-b^2)$

8) $6(a+b)^2$, $(a-b)^2$ 9) $9(a^2-b^2)$, $15(a-b)^2(a+b)$

**3.** 다음 옹근식들의 최소공통배수를 구하여라.

1) $ab$, $bc$, $ac$ 2) $xy^2$, $yz^2$, $zx^2$

3) $2x^2$, $5xy$, $10xy^4$ 4) $3a^2b$, $2ab^2$, $8abc$

5) $a(a+b)$, $b(a-b)$, $ab(a+b)^2$ 6) $6x^2y$, $12xy^2$, $18x(x^2-xy)$

## 2. 분수식과 그 뜻구역

분모에 변수가 들어있는 분수모양의 식을 그 변수에 관한 **분수식**이라고 부른다.

**례 1** 식 $\frac{2a^2}{a+b}$은 $a$, $b$에 관한 분수식이고 $\frac{1}{x}$, $\frac{x-2}{x+\frac{1}{x}}$는 $x$에 관한 분수식이다.

**알아보기** 옹근식은 변수의 임의의 값에 대하여 값을 가진다.

분수식 $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-1}$은 $x$가 어떤 수일 때 값을 가지지 않는가?

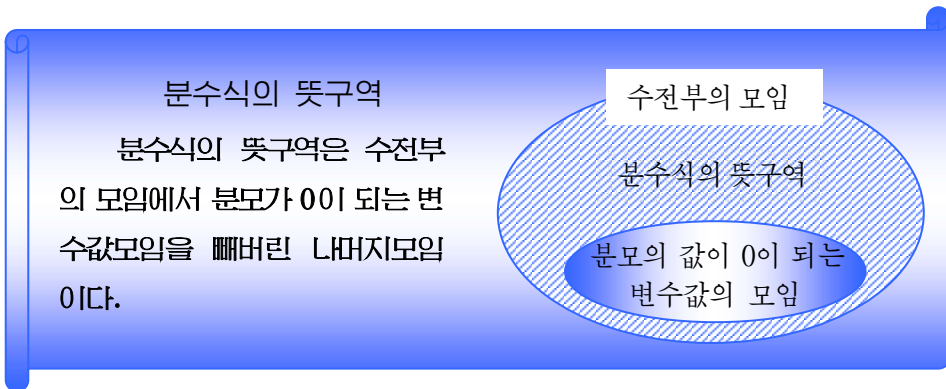
식이 값을 가지는 변수값들의 모임을 그 식의 **뜻구역**이라고 부른다. 옹근식의 뜻구역은 수전부의 모임이다.

**분수식의 뜻구역**

분수식의 뜻구역은 수전부의 모임에서 분모가 0이 되는 변수값모임을 빼버린 나머지모임이다.

수전부의 모임

분수식의 뜻구역

분모의 값이 0이 되는 변수값의 모임

**례 2** $\frac{3x}{2x-10}$의 뜻구역을 구하여라.

(풀이) 방정식 $2x-10=0$을 풀면 $x=5$이다.

따라서 $x=5$일 때 분수식은 뜻을

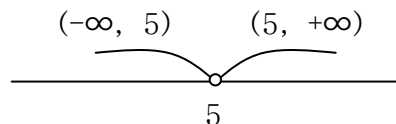



그림 3-1

가지지 않는다. 그러므로 뜻구역은

$$\{x|x\neq 5\}$$

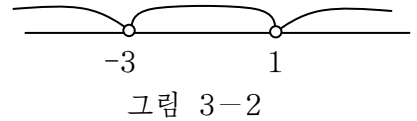
즉 $(-\infty, +5)\cup(5, +\infty)$

**례 3** $\frac{4x}{(x-1)(x+3)}$의 뜻구역을 구하여라.

그림 3−2

(풀이) $x=1$, $-3$일 때 분모가 0이므로

뜻구역은 $\{x\,|\,x\neq 1,\ x\neq -3\}$

이것을 수축에 표시하면 그림 3−2와 같다.

## 문 제

1. 다음 식의 뜻구역을 구하고 그것을 수축에 표시하여라.

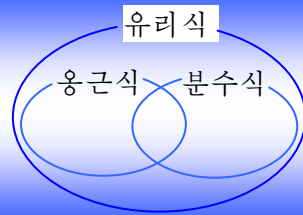
   1) $\frac{1}{1-2x}$  2) $\frac{4x}{(x-1)(x-3)}$  3) $\frac{x+1}{x^2-4}$

   4) $\frac{2}{x^2+1}$  5) $\frac{5}{|x|-1}$  6) $\frac{x^2-1}{2}$

2. 뜻구역이 $\{x\,|\,x\neq -2,\ x\neq 3\}$인 분수식과 뜻구역이 수전부모임으로 되는 분수식의 실례를 각각 2개씩 들어라.

수나 변수들에 더하기나 덜기, 곱하기나 나누기를 해서 얻은 식을 유리식이라고 부른다.

옹근식이나 분수식은 다 유리식이다.

## 문 제

1. 다음 식들가운데서 옹근식과 분수식을 각각 골라내여라.

   1) $a$  2) $\frac{3}{b}$  3) $x(x^2-1)$  4) $\frac{1}{2-a}$

   5) $\frac{3}{4}$  6) $\frac{x+1}{(x-1)(x+3)}$  7) $\frac{x-y}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$  8) $x+\frac{1}{x}$

2. 다음과 같이 말하면 옳은가?

   1) $x^2-5x+6$은 유리식이 아니다.  2) $(x-1)(x^2+x+1)$은 유리식이다.

3) $x^2-x+\frac{1}{x}$은 분수식이다.

4) $x(x+3)+\frac{5}{x+1}$는 유리식이다.

## 련 습 문 제

1. 다음 식들가운데서 옹근식과 분수식을 갈라내여라.

$$\frac{2}{x},\ \frac{x}{2},\ \frac{3}{1-2.5x},\ \frac{x(x-1)}{5},\ \frac{3x-1}{x^2+2x+1},\ \frac{x}{x+\frac{1}{x^2+1}}$$

2. 다음 옹근식을 여러마디식으로 변형하여라.
   1) $3x(2x+1)^2$
   2) $(5x-3)(5x+3)(2-3x)^3$
   3) $(3x-2y+5)(3x-2y-5)$
   4) $(x^3-3x^2-2)(3x+2-x^2)$
3. 다음 옹근식들의 최대공통약수, 최소공통배수를 구하여라.
   1) $4x^2y$, $12xy^2z$
   2) $24a^3b^2$, $18ab$, $30ab^4c$
   3) $x^2-xy$, $xy-y^2$, $x^2-y^2$
   4) $x^2-4x+4$, $x^2+x-6$, $2x^2-3x-2$
4. 다음 옹근식들의 최소공통배수를 구하여라.
   1) $6x$, $2x^2-5x-3$, $x^3-3x^2$
   2) $x^2-6x+9$, $x^2+6x+9$, $x^2-9$
   3) $(a-b)(b-c)$, $(b-c)(c-a)$, $(c-a)(a-b)$
   4) $a(a-b)(a-c)$, $b(b-c)(b-a)$, $c(c-a)(c-b)$
5. 다음 분수식이 값을 가지지 않는 변수값의 모임을 구하여라.
   1) $\frac{1}{2x-3}$
   2) $\frac{3}{x(x-4)}$
   3) $\frac{x+1}{x^2-9}$
   4) $\frac{x}{|x|+1}$
6. 다음 식의 뜻구역을 선택하여라.
   1) $\dfrac{x-\frac{1}{1-x}}{1+\frac{1}{x}}$ ㄱ) $\{x|x\neq 0\}$ ㄴ) $\{x|x\neq 1\}$ ㄷ) $\{x|x\neq 0,\ x\neq \pm 1\}$
   2) $\dfrac{|x|}{|x-1|-3}$ ㄱ) $\{x|x\neq 0\}$ ㄴ) $\{x|x\neq 4\}$ ㄷ) $\{x|x\neq -2\}$ ㄹ) $\{x|x\neq -2,\ x\neq 4\}$
   3) $\dfrac{1-5x}{x^2+x+1}$ ㄱ) $\{x|x\neq \frac{1}{5}\}$ ㄴ) $\{x|x$는 모든 수$\}$ ㄷ) $\{x|x\neq 1\}$
7. 다음 분수식의 뜻구역을 구하여라. 그리고 그것을 수축에 표시하여라.
   1) $\frac{2}{1-3x}$
   2) $\frac{3}{x(x-5)}$
   3) $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+5)^2}$
   4) $\frac{3x-1}{(x+2)^3+1}$

## 제2절. 분수식의 계산

### 1. 분수식의 약분과 통분

분수의 성질 $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}(b\neq0,\ c\neq0)$는 수식을 다루는데 많이 써왔다.
분수식도 분수에서와 비슷한 성질을 가진다.

분수식의 분자, 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱해도 값이 같은 분수식이 나온다.

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}}{\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}}\qquad(\mathrm{C}\neq0)$$

례 1 분수식 $\dfrac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{2}{3}x}$을 분자, 분모의 마디의 곁수가 옹근수인 분수식으로 고쳐라.

(풀이) 2와 3의 최소공통배수 6을 분자, 분모에 곱하면

$$\frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{2}{3}x}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot6}{\frac{2}{3}x\cdot6}=\frac{3x+6}{4x}$$

알아보기 1. 분수식 $\frac{3}{x-1}$의 분자, 분모에 식 $x+1$을 같이 곱하면 $\frac{3(x+1)}{x^2-1}$을 얻는다. 이때 얻어진 분수식의 뜻구역이 처음과 같은가?
2. 우의 분수식들의 공통뜻구역에서 몇개의 변수값들을 잡고 분수식들의 값들을 구하여 비교하여라. 무엇을 알수 있는가?

분수식들의 값은 늘 그것들의 공통뜻구역에서만 생각한다.
분수식의 분자, 분모에 0이 아닌 같은 식을 곱해도 값이 같은 식이 나온다.
이때에는 식의 뜻구역이 달라질수 있다.

두 식의 공통뜻구역에서 식의 값이 늘 같으면 그 두 식은 **같은 식**이라고 부른다.

례 2 분수식 $\frac{1}{x}$의 분자, 분모에 식 $x-1$을 같이 곱하면 $\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x(x-1)}$

그런데 분수식 $\frac{1}{x}$의 뜻구역은 $\{x|x\neq0\}$

$\dfrac{x-1}{x(x-1)}$ 의 뜻구역은 $\{x|x\neq 0,\ x\neq 1\}$이다.

분수식의 분자, 분모를 그것들의 공통약수로 나누어 그와 같은 식으로 고치는것을 분수식을 약분한다고 말한다.

$$\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A}{B} \qquad (B\neq 0,\ C\neq 0)$$

C로 약분

**례 3**

$$\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$$

$$\frac{5(x+1)}{x^2+2x+1}=\frac{5(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{5}{x+1}$$

**례 4**

$$\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{2x^2-3x-2}{2x+1}=\frac{(2x+1)(x-2)}{2x+1}=x-2$$

례 3의 약분에서는 식들의 뜻구역이 달라지지 않았다.
그러나 례 4의 약분에서는 뜻구역이 달라졌다.

## 문 제

1. 다음 분수식의 분자, 분모의 최대공통약수를 선택하여라.

| | ㄱ) | ㄴ) | ㄷ) | ㄹ) |
|---|---|---|---|---|
| 1) $\dfrac{x}{x^2+x}$ | ㄱ) $x$ | ㄴ) 없다 | ㄷ) 1 | ㄹ) 0 |
| 2) $\dfrac{x^2+x-6}{x(x+3)}$ | ㄱ) 없다 | ㄴ) $x$ | ㄷ) 1 | ㄹ) $x+3$ |
| 3) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x}$ | ㄱ) $x-1$ | ㄴ) $x+1$ | ㄷ) 1 | ㄹ) 없다 |

2. 다음 분수식을 약분하여라.

1) $\dfrac{6x^2}{12xy}$ 2) $\dfrac{16ab^2}{24a^2b}$ 3) $\dfrac{21a^2bc^2}{28ab^2c}$ 4) $\dfrac{0.6(a-2)^2}{0.8(a-2)x}$

분수에서와 마찬가지로 분수식들의 통분을 생각할수 있다.

분모가 서로 다른 분수식들을 분모가 같은 분수식들로 고치는 것을 분수식들을 통분한다고 말한다.

분수식들을 통분할 때에는 보통 분모들의 최소공통배수를 공통분모로 잡는것이 좋다.

**례 5** 분수식 $\frac{1}{4a^2b}$, $\frac{1}{6ab^2}$ 을 통분하여라.

(풀이) 분모들의 최소공통배수는

$$12a^2b^2$$

그러므로

$$\frac{1}{4a^2b}=\frac{\boxed{3b}}{4a^2b\cdot\boxed{3b}}=\frac{3b}{12a^2b^2}$$

$$\frac{1}{6ab^2}=\frac{\boxed{2a}}{6ab^2\cdot\boxed{2a}}=\frac{2a}{12a^2b^2}$$

**례 6** 분수식 $\frac{1}{x^2+xy}$, $\frac{1}{y^2+xy}$ 을 통분하여라.

(풀이) 분모들의 최소공통배수는 $xy(x+y)$

그러므로

$$\frac{1}{x^2+xy}=\frac{1}{x(x+y)}=\frac{y}{xy(x+y)},\quad \frac{1}{y^2+xy}=\frac{1}{y(x+y)}=\frac{x}{xy(x+y)}$$

## 문 제

다음 분수식을 통분하여라.

1) $\frac{1}{6ab}$, $\frac{2}{5a^2}$

2) $\frac{4}{9x^2y}$, $\frac{5}{12xy^2}$

3) $\frac{1}{3a^2b}$, $\frac{1}{7a^2b^3c}$, $\frac{1}{14a^3b^2}$

4) $\frac{3a}{4x^2y}$, $\frac{5b}{6y^2z}$, $\frac{c}{2xz^2}$

## 2. 분수식의 더하기와 덜기

분수식의 더하기와 덜기는 분수의 더하기, 덜기에서와 비슷한 방법으로 한다.

**분모가 같은 분수식들의 더하기, 덜기**

분모는 그대로 두고 분자들끼리 더하거나 던 다음 정돈한다.

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C} \qquad (C \neq 0)$$

**례 1**

1) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}$

2) $\frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2y}{x^2-y^2} = \frac{2x-2y}{x^2-y^2} = \frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{2}{x+y}$

3) $\frac{5}{a-1} + \frac{3}{1-a} = \frac{5}{a-1} - \frac{3}{a-1} = \frac{5-3}{a-1} = \frac{2}{a-1}$

### 문 제

다음 계산을 하여라. (1－2)

1. 1) $\frac{m}{a} + \frac{n}{a} - \frac{p}{a}$　　2) $\frac{m-n}{2am} + \frac{m+n}{2am}$

 3) $\frac{a+b}{x+a} + \frac{a-b}{x+a}$　　4) $\frac{x-1}{3xy} + \frac{x+3}{3xy} - \frac{2-x}{3xy}$

 5) $\frac{7a-2b}{(2a-b)^2} - \frac{3a}{(2a-b)^2}$　　6) $\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$

2. 1) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}$　　2) $\frac{a^2+16}{a-4} - \frac{8a}{a-4}$

 3) $\frac{x^2+y^2}{2x-6y} - \frac{6xy}{2x-6y}$　　4) $\frac{2x}{x^2-4x+3} + \frac{6}{x^2-4x+3}$

 5) $\frac{2}{2x^2-7x+3} - \frac{4x}{2x^2-7x+3}$　　6) $\frac{2}{x-1} + \frac{7}{1-x}$

 7) $\frac{m^2}{m-n} + \frac{n^2}{n-m}$　　8) $\frac{4x}{2x^2+5xy-3y^2} - \frac{2y}{2x^2+5xy-3y^2}$

### 분모가 다른 분수식들의 더하기, 덜기

먼저 통분하고 더하거나 던다.

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} \pm \frac{BC}{BD} = \frac{AD \pm BC}{BD} \quad (B \neq 0, D \neq 0)$$

**례 2** 1) $\frac{n}{m} \pm \frac{q}{p} = \frac{np}{mp} \pm \frac{mq}{mp} = \frac{np \pm mq}{mp}$

$$\frac{p}{6mn} + \frac{m}{9np} = \frac{p \cdot 3p}{18mnp} + \frac{m \cdot 2m}{18mnp} = \frac{3p^2 + 2m^2}{18mnp}$$

2) $\frac{a}{ab+b^2} - \frac{b}{a^2+ab} = \frac{a}{b(a+b)} - \frac{b}{a(a+b)} =$

$$= \frac{a^2 - b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab(a+b)} = \frac{a-b}{ab}$$

옹근식과 분수식의 더하기, 덜기에서는 옹근식을 분모가 1인 분수모양의 식으로 보고 계산한다.

**례 3** $x + 2 - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x+2}{1} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1) - x^2}{x+1} =$

$$= \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$$

### 문 제

다음 계산을 하여라. (1－4)

1. 1) $\frac{3}{4x} - \frac{5}{6x}$　　2) $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1}$　　3) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$

　4) $\frac{a+1}{a} + \frac{a}{a+1}$　　5) $\frac{3x}{2x+1} - \frac{4}{2x-1}$

2. 1) $\frac{4x}{x^2-9} - \frac{2}{x-3}$　　2) $\frac{1}{a+b} + \frac{2b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b}$

　3) $\frac{-a}{x(x-a)} + \frac{x}{a(x-a)}$　　4) $\frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{(a+b)^2}$

3. 1) $a - \frac{a^2}{a+1}$　　2) $2x + \frac{1+x^2}{1-x}$　　3) $a + b - \frac{a^2}{a-b}$　　4) $x^2 - \frac{x^2+1}{x^2-1} + 1$

4\. 1) $\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{42x^2y^2}+\frac{1}{14y^2}$ 2) $\frac{1}{a^2+ab}-\frac{1}{ab-b^2}+\frac{2}{a^2-b^2}$

3) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{2b^2}{a^2-b^2}$ 4) $\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{x}{2x-2y}+\frac{y}{x+y}$

5) $\frac{4a}{4a^2-1}-\frac{2a+1}{6a-3}+\frac{2a-1}{4a+2}$ 6) $\frac{4x-3}{3-2x}-\frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}-\frac{4+5x}{3+2x}$

5\. 식을 간단히 한 다음에 $x=-1.5$일 때의 값을 구하여라.

1) $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x+2}{x^2-1}$ 2) $\frac{x+2}{x^2+3x}-\frac{1+x}{x^2-9}$

6\. 식을 간단히 한 다음에 $x=0.75$일 때의 값을 구하여라.

1) $\frac{4}{x^2+x-6}-\frac{3}{x^2+4x+3}$ 2) $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{x}{2x^2-9x+9}$

3) $x+1-\frac{x^2+1}{x+1}$ 4) $x^2+x+1-\frac{x^2}{x-1}$

7\. $a+\frac{1}{a}=\frac{13}{6}$, $x+\frac{1}{x}=a$일 때 $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 구하여라.

8\. 다음 계산을 하여라.

1) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}$

2) $\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$

## 3. 분수식의 곱하기와 나누기

분수식의 곱하기와 나누기도 분수에서와 마찬가지로 한다.

**분수식의 곱하기**

분모끼리 곱하고 분자끼리 곱한 다음 정돈한다.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

례 1

1) $\frac{3mn}{25x^2y^3}\cdot\frac{5x^3y^2}{12m}=\frac{3mn\cdot 5x^3y^2}{25x^2y^3\cdot 12m}=\frac{nx}{20y}$

2) $(a^2-b^2)\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{1}\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)\cdot ab}{a+b}=ab(a-b)$

## 문 제

다음 계산을 하여라. (1－3)

1\. 1) $\dfrac{2x}{3y}\cdot\dfrac{9y^2}{6x^2}$  2) $8a^2b^2\cdot\dfrac{5b}{12a^3}$

3) $8x^2y^2\cdot\left(-\dfrac{y}{12x^3}\right)\cdot\left(\dfrac{3x}{16y^2}\right)$  4) $\dfrac{2y}{3x^2}\cdot\dfrac{x}{2y^2}\cdot\dfrac{9y}{4x}$

5) $\dfrac{x^2-y^2}{24y^2}\cdot\dfrac{18xy}{(x-y)^2}$  6) $\dfrac{y^4}{x+2}\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{5x^7}$

7) $\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}\cdot\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$  8) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\cdot\dfrac{a-b}{a^2+b^2}$

2\. 1) $\left(\dfrac{2a}{b}\right)^3\dfrac{b^2}{4a}$  2) $\left(\dfrac{3a^5}{b^4}\right)^2\left(-\dfrac{b}{a^3}\right)^4$

3) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^3\left(\dfrac{b}{ab+1}\right)^3$  4) $\dfrac{ab}{a+b}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2$

5) $\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x+3}\right)^3\dfrac{x^2-9}{x^2+9}$  6) $\left(\dfrac{x^2-4}{x+1}\right)^3\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3x+2}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}\right)^3$

3\. 1) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16}\cdot\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-4}{x-3}$

2) $\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left[1+\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{(a+b-c)(a-b+c)}\right]$

3) $\left(1-\dfrac{2}{1-3a}\right)\left(1-\dfrac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\dfrac{1}{2(1-9a^2)}$

### 분수식의 나누기

나누는 분수식의 분자와 분모를 바꾼 다음 곱한다.

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\quad(B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0)$$

례 2 1) $\dfrac{b^2}{6a^2}\div\dfrac{b}{4a^3}=\dfrac{b^2}{6a^2}\cdot\dfrac{4a^3}{b}=\dfrac{2ab}{3}$

2) $\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{y+x}{xy}}=\dfrac{(x^2-y^2)xy}{x+y}=xy(x-y)$

옹근식으로의 나누기에서는 옹근식을 분모가 1인 분수모양의 식으로 보고 계산한다.

례 3 $\dfrac{a^2-ab}{a+b}\div(a-b)=\dfrac{a(a-b)}{a+b}\cdot\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a}{a+b}$

## 문 제

다음 계산을 하여라. (1－2)

1\. 1) $\dfrac{a}{4}\div\dfrac{12}{b}$ 2) $\dfrac{b}{6a^2}\div\dfrac{b}{4a^3}$ 3) $\dfrac{y}{15x^2}\div\dfrac{y^2}{10x}$

4) $\dfrac{45b^2}{28a^2c}\div\dfrac{18b^3}{21a^4c^2}$ 5) $2x\div\dfrac{4x^2}{54}$ 6) $\dfrac{x^2-y^2}{2xy}\div(x-y)$

7) $\dfrac{1}{a+2}\div\dfrac{3a}{a^2-4}$ 8) $\dfrac{b^2-ab}{a^3}\div\dfrac{a-b}{a^2}$ 9) $\dfrac{1}{a^2-9}\div\dfrac{1}{a^2-6a+9}$

2\. 1) $\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}\right)\div\dfrac{z}{4x^2y}$ 2) $\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right)\div\dfrac{2}{a+b}$

3) $\left(\dfrac{a+2}{a}-\dfrac{1}{a}\right)\div\left(\dfrac{1}{a}+1\right)$ 4) $\dfrac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{z}{y}}{\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}}$

5) $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+2}}$ 6) $\left(\dfrac{3x}{4a^2b}\right)^2\div\left(\dfrac{x}{2a^2b^2}\right)^3$

3\. 다음 계산을 보고 여러마디식을 한마디식으로 나누려면 어떻게 해야 하는가를 말해보아라.

$$(2x^3-4x^2+x-6)\div2x^2=(2x^3-4x^2+x-6)\cdot\frac{1}{2x^2}=$$
$$=\frac{2x^3}{2x^2}-\frac{4x^2}{2x^2}+\frac{x}{2x^2}-\frac{6}{2x^2}=x-2+\frac{1}{2x}-\frac{3}{x^2}$$

4\. 다음 계산을 하여라.

1) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-(y-z)^2}\cdot\dfrac{(x-y)^2-z^2}{x^2-xy}\div\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy-xz}$

2) $\left(x-y-\dfrac{4y^2}{x-y}\right)\left(x+y+\dfrac{4x^2}{x+y}\right)\div\left[3(x+y)-\dfrac{8xy}{x-y}\right]$

3) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}\div\dfrac{x^3+4x^2+4x}{3x^2-12x+12}\right)\dfrac{x}{3}$

## 련 습 문 제

다음 계산을 하여라. (1－3)

1. 1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}-\dfrac{x}{4-x^2}$ 　　2) $\dfrac{1}{12x^2}+\dfrac{1}{42x^2y^2}-\dfrac{1}{14y^2}+\dfrac{1}{6xy}$

3) $\dfrac{a+2}{a}-\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{a^2}{a^2-2a}$ 　　4) $\dfrac{b}{ab-5a^2}-\dfrac{15b-25a}{b^2-25a^2}$

2. 1) $\dfrac{b}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a+b}{b^2-ab}$ 　　2) $\dfrac{x-30y}{x^2-100y^2}-\dfrac{10y}{10xy-x^2}$

3) $\dfrac{1}{(a-3)^2}-\dfrac{2}{a^2-9}+\dfrac{1}{(a+3)^2}$ 　　4) $\dfrac{1}{a^2+ab}-\dfrac{1}{ab-b^2}+\dfrac{2}{a^2-b^2}$

5) $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}+\dfrac{2x^2-5}{x^2+x-2}$

6) $\dfrac{x+2y}{x^2-xy}-\dfrac{x-3y}{x^2-2xy}+\dfrac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2}$

7) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}+\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-x-12}-\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+6x}$

8) $\dfrac{a^2}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a^2}{a+1}-\dfrac{1}{a-1}$

3. 1) $x-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ 　　2) $2x+1-\dfrac{1}{1-x}$

3) $a-b+\dfrac{b^2}{a+b}$ 　　4) $a+b-\dfrac{b^2+a^2}{b-a}$

4. 다음 분수식을 옹근식과 분수식의 합으로 표시하여라.

1) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ 　　2) $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2}$

3) $\dfrac{3a^2-a+3}{a^2+1}$　　4) $\dfrac{x^5-4x^3-x^2+2x+4}{2x^2}$

5. 영수와 영철이는 $m$일동안에 각각 $c$kg의 파철을 모으기로 하였는데 이 일을 영수는 $a$일, 영철이는 $b$일이나 앞당겨 끝냈다.
   1) 두 학생은 처음에 파철을 하루 평균 몇kg씩 모으기로 하였는가?
   2) 2명이 하루 평균 몇kg의 파철을 모았는가?

6. 어떤 농산작업반의 전체 밭에 물을 대는데 각각 $t_1$, $t_2$시간씩 걸리는 2대의 양수기가 있다. 그런데 양수기운전공들이 기술혁신을 하여 물대는 시간을 첫째 양수기는 $a$시간, 둘째 양수기는 $b$시간 줄였다. 두 양수기를 함께 돌리면 전체 밭에 물을 대는데 몇시간 걸리겠는가?

다음 계산을 하여라. (7－9)

7. 1) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{4a+4b}{5a-5b}$　　2) $\dfrac{a^2-4b^2}{42ab}\cdot\dfrac{35a^2}{a^2-4ab+4b^2}$

   3) $\dfrac{ax^2-ay^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\dfrac{3x+3y}{ax^2-2axy+ay^2}$　　4) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\cdot\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-x-12}$

8. 1) $\dfrac{ax^2-ay^2}{x^2+2xy+y^2}\div\dfrac{ax^2-2axy+ay^2}{5x+5y}$　　2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}\div\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}$

   3) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+5x+4}\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8}$　　4) $\dfrac{x^2+y^2}{4x^2-2x-y-y^2}\div\dfrac{x^3+xy^2}{2x+y}$

   5) $\dfrac{n^2-10mp-2np+5mn}{6mn-np}\div\dfrac{n^2-25m^2}{p^2-6mp}$

9. 1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right)\div\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$　　2) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

   3) $\left(\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right)\times\dfrac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}$　　4) $\left(x+1-\dfrac{1}{1-x}\right)\div\left(x-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

10. 다음 분수식을 간단히 하여라.

   1) $\dfrac{y-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y}+y}$　　2) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{ab}}$　　3) $\dfrac{a^2b}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{ab}}$　　4) $\dfrac{a-\dfrac{x^2}{a}}{x-\dfrac{a^2}{x}}$

11. $a=-2.5$, $b=-0.5$일 때

$$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$$

의 값을 구하여라.

12. 다음 계산을 하여라.

1) $\dfrac{y^2-4y+3}{y^2-5y+4}\div\dfrac{y^2-10y+21}{y^2-9y+20}\cdot\dfrac{y^2-7y}{y^2-5y}$

2) $\dfrac{x^4-8x}{x^2-4x-5}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-2x}\div\left(x+7+\dfrac{39}{x-5}\right)$

3) $\left(2-\dfrac{3b}{a}+\dfrac{9b^2-2a^2}{a^2+2ab}\right)\div\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{a+b}{a^2-ab-6b^2}\right)$

## 제3절. 갈기식과 안갈기식의 증명

### 1. 갈기식의 증명

**갈기식의 성질**

1) $a=b \Leftrightarrow a-b=0$ 2) $a=b \Leftrightarrow a\pm m=b\pm m$ 3) $a=b \Leftrightarrow am=bm$, $m\neq 0$

4) $a=b \Leftrightarrow \dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{m}$, $m\neq 0$ 5) $a=b$, $b=c \Rightarrow a=c$

갈기식의 성질을 써서 갈기식이 성립한다는것을 밝히는것을 **갈기식의 증명**이라고 부른다.

한 식을 모양이 다른 같은 식으로 고치는것을 **식의 변형**이라고 부른다.

갈기식을 증명할 때는 식의 변형이 자주 쓰인다.

**례 1** 다음 갈기식을 증명하여라.

$$x^2-y^2-2x+4y-3=(x+y-3)(x-y+1)$$

(증명) 오른변을 변형하면

$$(x+y-3)(x-y+1)=x^2-xy+x+xy-y^2+y-3x+3y-3$$
$$=x^2-y^2-2x+4y-3 \text{ (왼변)}$$

따라서

$$x^2-y^2-2x+4y-3=(x+y-3)(x-y+1)$$

**례 2** $a+b+c=0$일 때 다음 같기식을 증명하여라.

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=(2a+c)^2+(2b+a)^2+(2c+b)^2$$

(풀이) 왼변을 변형하면

$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc$

$=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2$

$a+b+c=0$이므로

$-a=b+c,\ -b=a+c,\ -c=a+b$

따라서

$(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2=(2a+c)^2+(2c+b)^2+(2b+a)^2$

즉 $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=(2a+c)^2+(2b+a)^2+(2c+b)^2$

## 문 제

다음 같기식을 증명하여라. (1－3)

1. 1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)(a-c)(b-c)$

   2) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

2. 1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$일 때 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

   2) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$

   3) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$

3. 1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$일 때 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$

   2) $a+b+c=0,\ abc\neq 0$일 때

   $$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

   3) $abc=1,\ a+b+c\neq 0,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$일 때

   $$\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}+\frac{1}{1-ab}=1$$

상 식

라마누잔늘같기식

인디아의 수학자 라마누쟌(1887년-1920년)은 소학교시절에 벌써 6 165개의 정의와 공식이 들어있는 고등수학책을 자습으로 공부하였는데 거기에는 정리의 증명이나 공식을 이끌어내는 과정이 주어지지 않았으므로 자기식으로 증명도 해보고 공식을 이끌어내기도 하면서 새로운 정리와 공식을 발견하였다고 한다. 이때 그는 다음과 같은 늘같기식을 발견하였다.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{4^3-4}+\cdots+\frac{1}{(2n)^3-2n}$$

이것이 라마누쟌늘같기식이다. 여기서 $n$은 자연수이다.

2. 안같기식의 증명

안같기식의 성질

1) $a>b \Leftrightarrow a-b>0$

2) $a>b \Leftrightarrow a\pm m>b\pm m$

3) $a>b \Leftrightarrow am>bm(m>0)$

$a>b \Leftrightarrow am<bm(m<0)$

4) $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$

5) $a>b,\ c>d \Rightarrow a+c>b+d$

6) $a>b>0,\ c>d>0 \Rightarrow ac>bd$

안같기식의 성질을 써서 안같기식이 성립한다는것을 밝히는것을 **안같기식의 증명**이라고 부른다.

례 안같기식 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$를 증명하여라.

(풀이) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]\geq 0$

따라서 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

(다른 방법)

$$(a-b)^2\geq 0,\ (a-c)^2\geq 0,\ (b-c)^2\geq 0$$

세 안같기식을 변끼리 더하면

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$$

## 문 제

1. 다음 안같기식을 증명하여라.

 1) $a>0$일 때 $a+\frac{4}{a}\geq 4$ 2) $a>0$, $b>0$일 때 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

2. $a>b>0$, $c>0$일 때 다음 안같기식을 증명하여라.

$$\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}$$

3. $a>0$, $b>0$, $a+b\geq 1$일 때 $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$을 증명하여라.

4. $3(1+x^2+x^4)\geq(1+x+x^2)^2$을 증명하여라.

## 련 습 문 제

1. 다음 같기식을 증명하여라.

 1) $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$

 2) $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\frac{a+b+c}{2}$

 3) $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{c-b}{x-a}+\frac{a-c}{x-b}+\frac{b-a}{x-c}$

2. 다음 같기식을 증명하여라.

 1) $abc=1$일 때

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

 2) $a+b+c=0$일 때

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

 3) $2x+y-z=0$, $2x-y-2z=0$일 때

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}$$

 4) $a+b=c$일 때

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=2$$

3. $a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab=0$이면 $a=b=c=0$임을 증명하여라.

4. 다음 안같기식을 증명하여라.

1) $\frac{a^4+1}{a^2} \ge 2$　　2) $a+b \ge 0$일 때 $a^3+b^3 \ge a^2b+ab^2$

3) $a-b \ge 0$일 때 $a^3-b^3 \ge a^2b-ab^2$

4) $(a+b+c)^2 \ge a(b+c-a)+b(a+c-b)+c(a+b-c)$

5) $a>0$, $b>0$일 때 $\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

## 복 습 문 제

1. 다음 옹근식을 여러마디식으로 변형하여라.

1) $3x(x^2-2x-12)$　　2) $(2x^3-x^2+3x-1)(-5x^2)$

3) $-x^2(x+2)(x-5)$　　4) $(2x-3)5x^2(3x+4)$

2. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $(x-a)(x^2+ax+a^2)$　　2) $(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$

3) $(x+a)(x^{2n}-ax^{2n-1}+a^2x^{2n-2}- \cdots -a^{2n-1}x+a^{2n})$

3. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $(x^2+x+2)(x^2+x-1)-4$　　2) $(x^2-x+3)(x^2-x-5)-33$

3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$　　4) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-180$

5) $x^{10}-a^{10}$　　6) $x^9+a^9$

4. 다음 분수식의 뜻구역이 서로 같으면 ○, 같지 않으면 ×로 표시하여라.

1) $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{x^2-1}$　　2) $\frac{b+2}{a-4}$, $\frac{b+2}{4-a}$

3) $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1-x}{1-x^2}$　　4) $\frac{4}{x^2+1}$, $\frac{4(x+2)}{(x^2+1)(x+2)}$

5. 다음 분수식의 뜻구역을 구하여라. 그리고 그것을 수축에 표시하여라.

1) $\frac{x+1}{18-9x}$　　2) $\frac{2x-3}{x(x+5)}$　　3) $\frac{x}{(x-1)(x-3)}$　　4) $\frac{1-2x}{x^2-2x-24}$

5) $\frac{1}{|x|+1}$　　6) $\frac{x}{|x+1|-1}$　　7) $\frac{3x}{x^2+x+1}$　　8) $\frac{x-\frac{1}{1-x}}{x+\frac{1}{x}}$

6. 한 도시에서 150km 떨어진 혁명전적지로 승용차가 90km/h의 속도로 떠났다. 한시간 지나서 혁명전적지에서 뻐스가 도시로 떠났는데 $t$시간만에 승용차를 만났다.

1) 뻐스의 속도 $v$(km/h)를 $t$로 표시하여라.

2) $t$는 어떤 값을 가질수 있는가?

3) $t=\frac{1}{5}$h, $t=0.25$h일 때 $v$의 값을 구하여라.

7. 간석지농사를 잘할데 대하여 주신 위대한 수령 **김일성**대원수님의 유훈을 높이 받들고 한 농산작업반에서는 새로 만든 간석지논에 물을 대기 위하여 $a$km의 물길을 째기로 하였다. 처음에는 매일 $b$km씩 쨀것을 계획했는데 실지는 매일 $c$km씩 더 했다. 이 작업반에서는 계획했던 일을 며칠 앞당겨 끝냈겠는가?
$a=1.5$, $b=0.3$, $c=0.2$일 때 앞당긴 날자를 구하여라.

8. 다음 분수식의 값이 0이 될 $x$의 값을 구하여라.

1) $\frac{2x-1}{x}$　　2) $\frac{(x+1)(x-5)}{x}$　　3) $\frac{x^2-3x}{x+2}$

4) $\frac{x^2-9}{x}$　　5) $\frac{x^2-14x+49}{x^2+1}$　　6) $\frac{4x^2-12x+9}{2x-3}$

다음 계산을 하여라.(9−12)

9. 1) $\frac{x+8}{1-3x}+\frac{9-2x}{3x-1}$　　2) $\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{y}{y^2-x^2}$

3) $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{4x^2-1}$　　4) $\frac{5}{2a-3}+\frac{2}{3+2a}-\frac{a-1}{9-4a^2}$

10. 1) $\frac{x^2-y^2}{8xy^2}\div\frac{x-y}{4xy}$　　2) $\frac{a^2-4b^2}{35ab}\cdot\frac{28a^2}{a^2-4ab+4b^2}$

3) $\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{x}$　　4) $\frac{x^2+x-2}{5x+15}\div\frac{x^2+4x+4}{7x+21}$

11. 1) $\left(1+\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{10a^2}$　　2) $\left(\frac{a+2}{a-2}\right)^3\div\frac{a^3+4a^2+4a}{3a^2-12a+12}\cdot\frac{a}{3}$

3) $\left(1-\frac{4}{x-1}+\frac{12}{x-3}\right)\left(1+\frac{4}{x+1}-\frac{12}{x+3}\right)$

12. 1) $\left(\frac{2a^2+5ab+2b^2}{a^2-ab-2b^2}\div\frac{a+2b}{a-2b}\right)\cdot\left(\frac{2a-b}{3a+b}-\frac{12a^2-b^2}{6a^2+5ab+b^2}+\frac{3a-b}{2a+b}\right)$

2) $\frac{x(x+3)-a(a-1)+2a}{2x}\div\left\{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{x-1}}\cdot\left[1+\frac{(x-a)(x+a)+1}{2x}\right]\right\}$

3) $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}} \div \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}} - \dfrac{1}{b(abc+a+c)}$

13. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$  2) $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+2}}$  3) $\dfrac{x-1+\dfrac{2}{x+2}}{x+1-\dfrac{2}{x+2}}$  4) $\dfrac{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}$

14. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(\dfrac{a^2-ax}{-a^2x+x^3}-\dfrac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2-a^3}\right)\left(1-\dfrac{x-1}{a}-\dfrac{x}{a^2}\right)$

2) $\left[\dfrac{1}{2}\left(x^4-\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]\cdot\dfrac{3x^2+12x-36}{x^2-x-12}$

15. $x=-2.5$일 때 다음 식의 값을 구하여라.

$$6x+\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{4x}{(x-2)(x^2+4x+4)}$$

16. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{abc}$

2) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(a+1)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(b+1)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(c+1)}=$

$$\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

17. 1) $a+b+c=0$일 때

$\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$을 증명하여라.

2) $\dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\dfrac{y^2-xz}{y(1-xz)}=\dfrac{z^2-xy}{z(1-xy)}$일 때

$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ $(x\neq y,\ xyz\neq 0)$을 증명하여라.

3) $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ \cdots\ =\dfrac{a_n}{b_n}$일 때 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{a_1}{b_1}$이라는것을 증명하여라.

# 제4장. 원

원과 3각형

원둘레각

원과 4각형

회전이동

## 제1절. 원과 3각형

### 1. 3각형의 외접원

그림 4-1

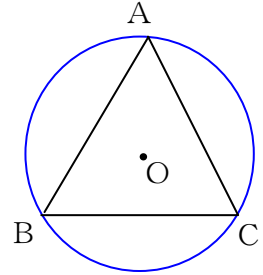
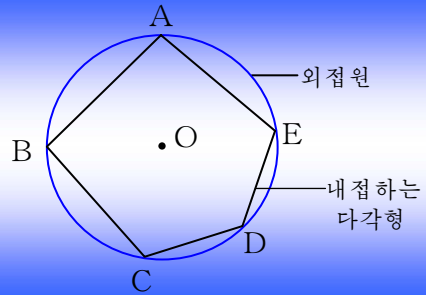
원둘레에 세 점을 찍고 그 점들을 정점으로 하는 3각형을 그렸다. 이때 △ABC를 원 O에 내접하는 3각형이라고 부른다.

다각형의 모든 정점이 한 원둘레에 놓일 때 그 다각형은 원에 내접한다고 말하고 그 원을 다각형의 외접원이라고 부른다.

### 문 제

그림 4－2에서 원에 내접하는 3각형, 4각형, 5각형을 다 말하여라.

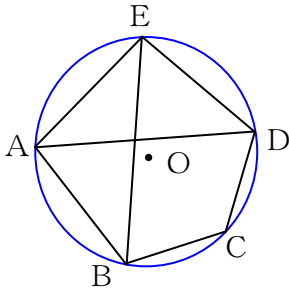



그림 4-2

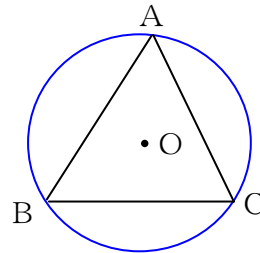



그림 4-3

**알아보기** △ABC의 외접원을 그렸다고 하고 그 중심을 O라고 하면(그림 4－3)

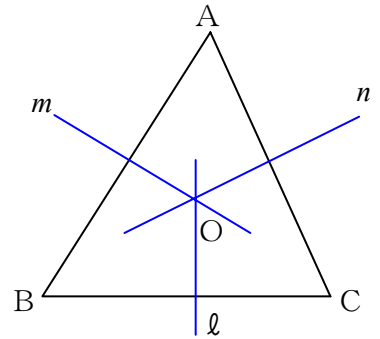
1) $d$(O, A)＝$d$(O, B)＝$d$(O, C)이다. 왜 그런가?

2) 점 O는 변 AB의 수직2등분선에 있다고 말할수 있는가?
   다른 변 BC, AC의 수직2등분선에도 점 O가 놓이겠는가?

**정리 1. 3각형의 세 변의 수직2등분선은 늘 한 점에서 사귄다.**

(증명) △ABC의 변 AB, BC, CA의 수직2등분선을 각각 $m$, $\ell$, $n$이라고 하자. $\ell$과 $m$의 사귐점을 O라고 할 때 O가 $n$에 놓인다는것을 증명하면 된다.

그림 4-4

O∈$m$이므로 $d$(O, A)=$d$(O, B)
O∈$\ell$이므로 $d$(O, B)=$d$(O, C)
따라서 $d$(O, A)=$d$(O, C)
따라서 O∈$n$

3각형의 세 변의 수직2등분선의 사귐점은 외접원의 중심으로 된다. 이 점을 3각형의 외심이라고 부른다.

## 문 제

1. 1) 뾰족3각형, 직3각형, 무딘3각형을 하나씩 그리고 그 외접원을 그려라.
   2) □안에 알맞는 글자를 써넣어라.
      ① 뾰족3각형의 외심은 3각형의 □에 놓인다.
      ② 직3각형의 외심은 □에 놓인다.
      ③ 무딘3각형의 외심은 3각형의 □에 놓인다.
2. 세 점 A, B, C가 한 직선에 놓일 때 그 세 점을 지나는 원둘레를 그릴수 있겠는가? 실지 그려보고 말하여라.
3. 영남이는 세 마을 A, B, C로부터 들려오는 12시 보도소리를 같은 시각에 들었다. 영남이가 있는 곳을 그림에 찍어보아라.(그림 4-5)
4. 반경이 같은 세 원이 서로 밖에 놓여있다. 이 세 원에 접하는 원을 그려라.

A •　　　　B •

• C

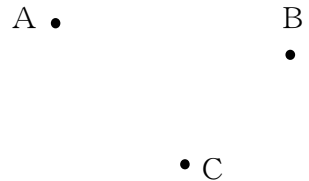



그림 4-5

### 2. 3각형의 내접원

원둘레에 그림 4-6과 같이 접선을 세개 그어 △ABC를 하나 그렸다.

이때 △ABC를 원 O에 외접하는 3각형이라고 부른다.

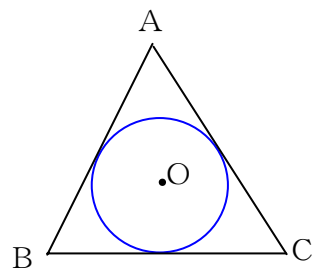
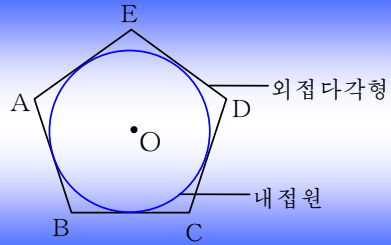



그림 4-6

다각형의 모든 변들이 한 원둘레에 접할 때 그 다각형은 원에 외접한다고 말하며 그 원을 다각형의 내접원이라고 부른다.

문 제

1. 다음의 글에 맞는 그림을 하나씩 그려라.
   1) △ABC는 원 O에 외접한다.
   2) 원 O는 4각형 ABCD에 내접한다.
   3) 원 O는 △ABC의 내접원이다.
   4) 4각형 ABCD는 원 O에 외접한다.
2. 그림 4-7에서 원 O에 외접하는 3각형, 4각형을 다 말하여라.

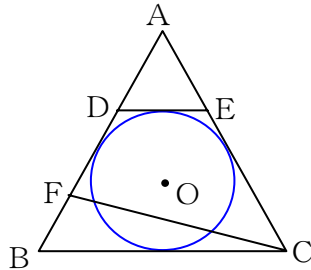



그림 4-7

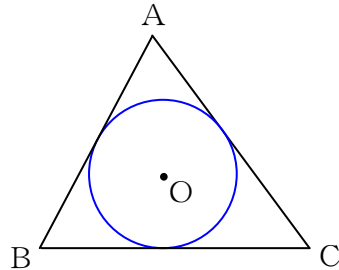



그림 4-8

**알아보기** △ABC에 내접원이 그려졌다고 하고 그 중심을 O라고 하자.(그림 4-8)

1) $d$(O, AB)$=d$(O, BC)$=d$(O, AC)이다. 왜 그런가?

2) 점 O는 ∠A의 2등분선에 있다고 말할수 있는가? ∠B, ∠C의 2등분선에도 놓이는가?

**정리 2. 3각형의 세 아낙각의 2등분선은 늘 한 점에서 사귄다.**

(증명) 3각형의 세 아낙각 A, B, C의 2등분선을 각각 $\ell$, $m$, $n$이라고 하자. $\ell$과 $m$의 사귐점을 O라고 하고 O가 $n$에 놓인다는것을 증명하면 된다.

O$\in\ell$이므로

$$d(\mathrm{O},\ \mathrm{AB})=d(\mathrm{O},\ \mathrm{AC})$$

$\mathrm{O}\in m$이므로

$$d(\mathrm{O},\ \mathrm{AB})=d(\mathrm{O},\ \mathrm{BC})$$

$$\therefore\ d(\mathrm{O},\ \mathrm{AC})=d(\mathrm{O},\ \mathrm{BC})$$

$$\therefore\ \mathrm{O}\in n$$

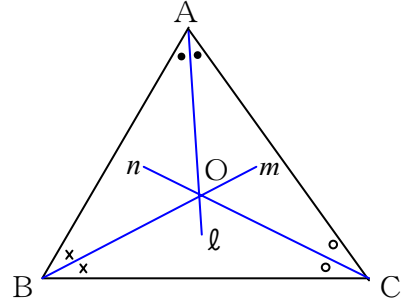



그림 4-9

3각형의 세 각의 2등분선의 사귐점은 그 3각형의 내접원의 중심이 된다. 이 점을 3각형의 **내심**이라고 부른다.

△ABC의 변 BC와 다른 두 변의 연장선 BD, CE에 접하는 원 $\mathrm{O}_1$을 3각형의 **방접원**이라고 부른다.(3각형의 한 아낙각과 그에 붙어있지 않는 두 바깥각의 2등분선의 사귐점을 **방심**(방접원의 중심)이라고 부른다.)

여기서

$$d(\mathrm{O}_1,\ \mathrm{BD})=d(\mathrm{O}_1,\ \mathrm{BC})=d(\mathrm{O}_1,\ \mathrm{CE})$$

한 3각형에는 방접원이 세개 있다.

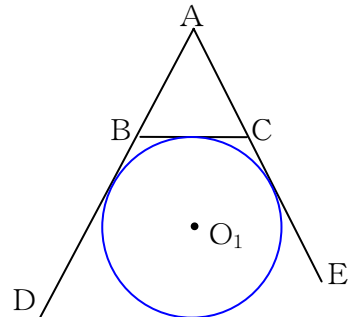



그림 4-10

문 제

1. 뾰족3각형, 직3각형, 무딘3각형을 하나씩 그리고 그의 내접원을 그려라.
2. △ABC모양의 판이 있다. AB=40cm, BC=30cm, AC=50cm일 때 이 판에서 반경이 가장 큰 원판을 오려내려고 한다. 이 원판의 반경을 구하여라.
3. 세 정점이 다 종이밖에 있고 종이에는 변의 일부만이 있는 3각형에 원을 내접시킬 때 그 중심을 구하여라.
4. 변 AB, AD, ∠A, 내접원의 반경을 알고 4각형 ABCD를 그려라.

련 습 문 제

1. 세 변이 3cm, 4.5cm, 5cm인 3각형을 하나 그리고 그에 내접하는 원과 외접하는 원을 그려라.
2. 다음것들가운데서 옳은것은 (　　)이다.
   1) 3각형의 내심은 그 3각형의 아낙에 있다.
   2) 3각형의 외심은 그 3각형의 바깥에 있다.
   3) 3각형의 외심과 내심은 3각형의 바깥 또는 아낙에 있다.

4) 우의것은 다 옳지 않다.

3. 3각형의 내심과 외심이 겹치는 3각형은 (  )이다.

1) 2등변3각형  2) 바른3각형  3) 직3각형  4) 직2등변3각형

4. 2등변3각형, 바른3각형을 하나씩 그리고 그 매개 3각형의 내접원과 외접원을 그려라.

5. 내접하는 원의 반경 r를 알고 그 바른3각형을 그려라.

6. 기계부분품의 도면들을 보면 그어있는 선들가운데 선분이나 활등들이 미끈하게 이어져있는 곳이 있다.(그림 4－11)

그림에서 Ø $a$, R$b$는 각각 직경과 반경을 표시한것이다. 선분과 활등이 미끈하게 이어지기 위해서는 그것들이 만나는 점에서 그 직선과 원둘레가 서로 접해야 한다.(그림 4－12)

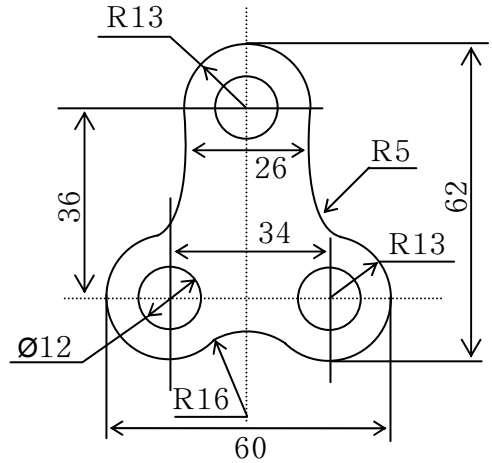



그림 4-11

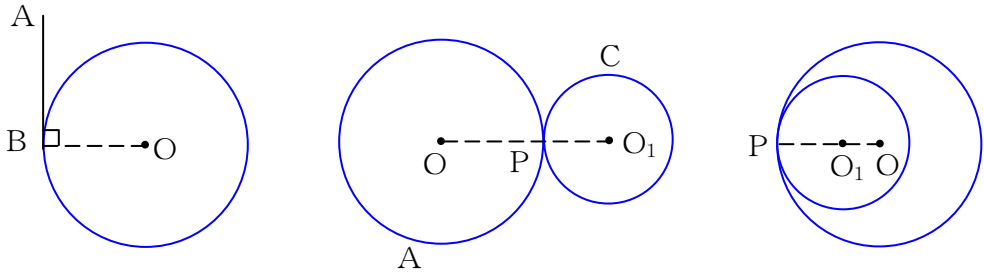



그림 4-12

두 활등을 미끈하게 이을 때에도 그 원둘레들이 서로 접해야 한다.

1) 평행이 아닌 두 직선 $\ell$과 $m$을 반경이 1cm인 활등으로 미끈하게 이어라.(그림 4－13)

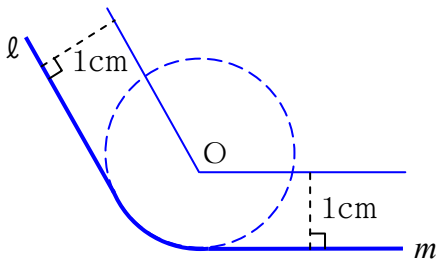



그림 4-13

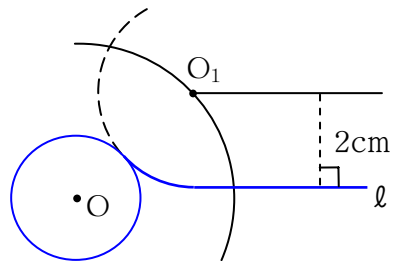



그림 4-14

2) 활등 O와 직선 $\ell$을 반경이 2cm인 활등으로 미끈하게 이어라.(그림 4－14)

7. △ABC와 그의 내접원 O가 있다. △ABC의 세 변 AB, BC, CA가 원 O와 점 D, E, F에서 접한다면

1) 선분 BD와 같은 선분이 있는가? 길이가 같은 선분들을 모두 말하여라.

2) AB＋AC－BC＝2AD이다. 증명하여라.

8. △ABC에서 변 BC에 접하는 방접원 O가 변 AB, AC의 연장선과 점 D, E에서 접하였다. 이때

$$AB+BC+AC=AD+AE$$

이다. 증명하여라.

9. 직3각형 ABC의 직각의 정점 B에서 가운데선 BD를 그었다. △ABD에 내접하는 원이 변 AD와 점 K에서 접했다. 점 K가 AD를 같은 부분으로 나눌 때 △ABC의 뾰족각들을 구하여라.

## 제2절. 원둘레각

### 1. 원둘레각

원둘레의 한 점에서 두 활줄이 사귈 때 그사이의 각을 두 활줄사이에 끼인 활등에 대한 원둘레각이라고 부른다.

때로는 활줄에 대한 원둘레각이라고도 부른다.

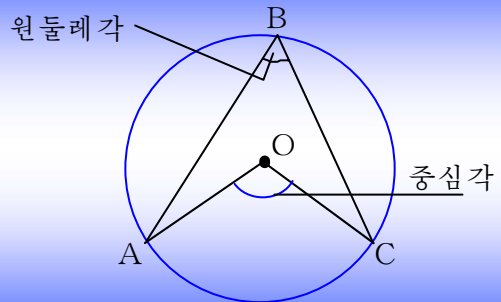
활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원둘레각에는 그 활등에 대한 중심각이 대응한다.

**문 제**

그림 4－15에서

1. 활등 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$의 원둘레각을 말하여라.
2. 활등 $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{BCD}$에 대한 원둘레각을 말하여라.

그림 4-15

ㄱ)

ㄴ)

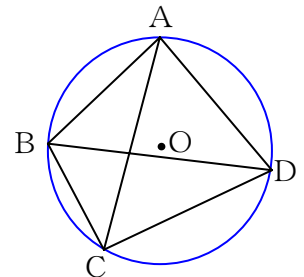
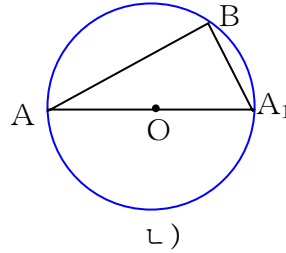
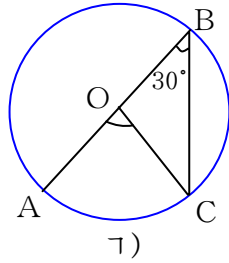



그림 4-16

**알아보기** 그림 4－16에서

1) 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원둘레각과 중심각을 말하여라.《중심각＝2×원둘레각》이라고 말할수 있는가?(그림 4－16의 ㄱ))
2) 활등 $\overset{\frown}{AA_1}$에 대한 원둘레각과 중심각을 비교하여라.(그림 4－16의 ㄴ))

**정리 3. 원둘레각은 같은 활등에 대한 중심각의 $\frac{1}{2}$과 같다.**

**조건.** $\angle ABC$: 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원둘레각
$\angle AOC$: 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 중심각

**결론.** $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$

ㄱ)

ㄴ)

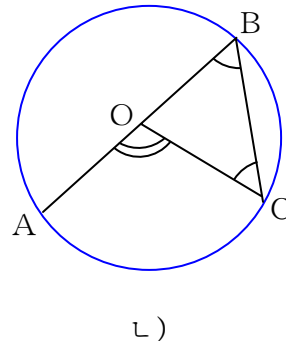
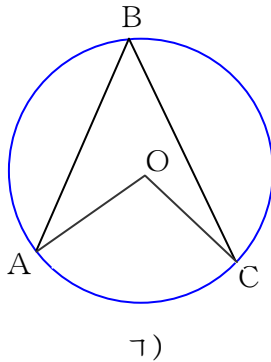



그림 4-17

**(증명)** 1) 중심 O가 $\angle ABC$의 한 변에 있는 경우(그림 4－17의 ㄴ))
$\triangle BOC$에서 $OB=OC$(반경)이므로 $\angle B=\angle C$
그런데 $\angle AOC=\angle B+\angle C$ (3각형의 바깥각의 성질)
따라서 $\angle AOC=\angle B+\angle B=2\angle ABC$

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

2) 중심 O가 $\angle ABC$의 아낙에 있는 경우 (그림 4－18의 ㄱ))

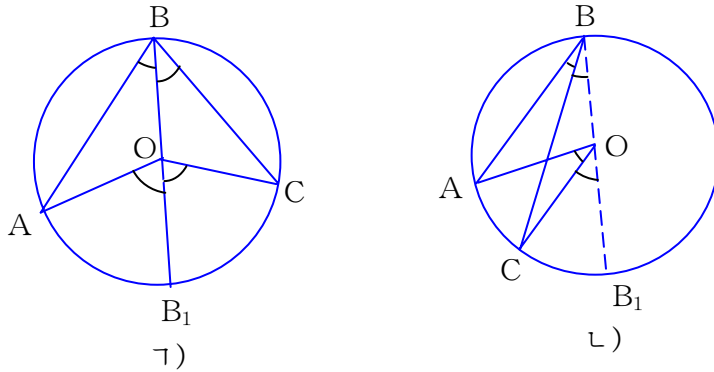



그림 4-18

직경 $BB_1$을 그으면 $\angle ABB_1 = \frac{1}{2}\angle AOB_1$, $\angle B_1BC = \frac{1}{2}\angle B_1OC$

$$\angle ABB_1 + \angle B_1BC = \frac{1}{2}(\angle AOB_1 + \angle B_1OC)$$

여기서 $\angle ABB_1 + \angle B_1BC = \angle ABC$, $\angle AOB_1 + \angle B_1OC = \angle AOC$

따라서 $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

3) 중심 O가 $\angle ABC$의 바깥에 있는 경우(그림 4－18의 ㄴ))

직경 $BB_1$을 그으면 $\angle ABB_1 = \frac{1}{2}\angle AOB_1$, $\angle CBB_1 = \frac{1}{2}\angle COB_1$

$$\angle ABB_1 - \angle CBB_1 = \frac{1}{2}(\angle AOB_1 - \angle COB_1)$$

여기서

$$\angle ABB_1 - \angle CBB_1 = \angle ABC, \quad \angle AOB_1 - \angle COB_1 = \angle AOC$$

따라서 $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

## 문 제

1. 1) 중심각이 다음과 같을 때 그에 대한 원둘레각을 구하여라.

$$36°, \ 35° \ 26', \ 82° \ 36', \ \frac{1}{2}\angle R, \ \frac{2}{3}\angle R, \ \frac{3}{5}\angle R$$

2) 원둘레각이 다음과 같을 때 그에 대한 중심각을 구하여라.

$$21°, \ 29° \ 13', \ 38° \ 28', \ 56°, \ \frac{2}{7}\angle R, \ \frac{2}{5}\angle R, \ \frac{3}{11}\angle R$$

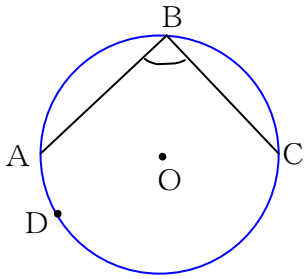



그림 4-19

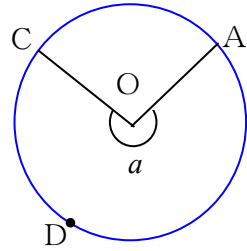



그림 4-20

2. 1) 그림 4–19에서 $\overset{\frown}{ADC}$에 대한 중심각을 그려라. $\angle ABC=102^\circ$일 때 그 중심각은 몇도인가?

2) 그림 4–20에서 $\overset{\frown}{ADC}$에 대한 원둘레각을 하나 그려라. $\angle a=240^\circ$일 때 원둘레각은 몇도인가?

3. 그림 4－21에서 $\angle x$는 몇도인가?

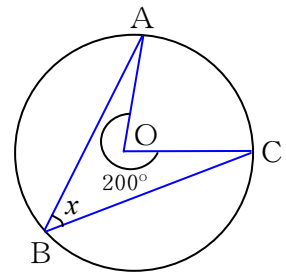
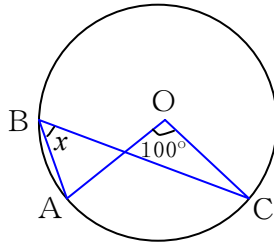
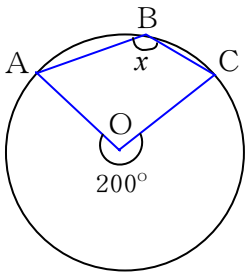



그림 4-21

그림 4－22에서와 같이 선분 AB와 그밖의 한 점 M이 있을 때 ∠AMB를 점 M에서 **선분 AB를 보는 각**이라고 부른다.

그림 4－23에서 선분 AB를 보는 각들을 말하여라.

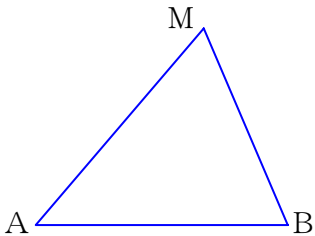
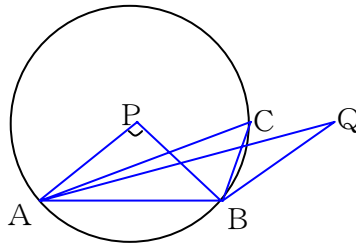
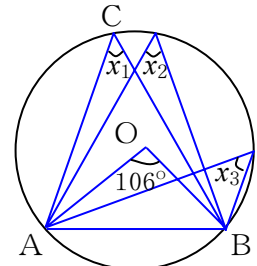



그림 4-22　　그림 4-23　　그림 4-24

**알아보기** 그림 4－24에서 $\angle x_1$, $\angle x_2$, $\angle x_3$은 몇도인가? 또 다 같다고 말할수 있는가? 어느 정리로부터 그렇게 말할수 있는가?

**계. 한 원에서 같은 활등에 대한 원둘레각은 같다.**

이 각을 그 활등 $\overset{\frown}{ACB}$가 **품는 각**이라고 부른다.
우에서와 같이 어떤 정리로부터 곧 따라나오는 명제를 **계(따름)**라고 부른다.

### 문 제

1. 1) 그림 4－25에서 직경 AC를 보는 각들을 말하여라. ∠APC＞∠AQC를 증명하여라.
   2) AC를 보는 각이 ∠R인 점들의 모임은 어떤 도형을 만들겠는가?

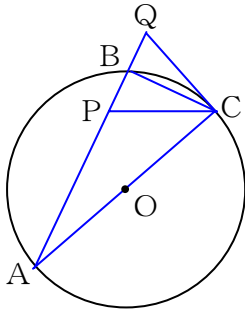



그림 4-25

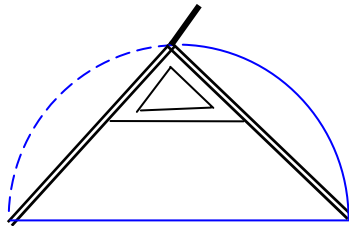



그림 4-26

2. 그림 4－26과 같이 직각의 두 변이 고정된 두 점을 각각 지나 직선에 놓이도록 삼각자를 움직여가면 연필의 끝점은 어떤 선을 따라 움직이겠는가?

### 2. 활줄과 접선사이의 각

**해보기** 1. 그림 4－27에서 활줄 AC와 접선 TC 사이의 각을 구하여라.

2. 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 임의의 원둘레각을 그리고 그 각과 ∠ACT를 비교하여라.

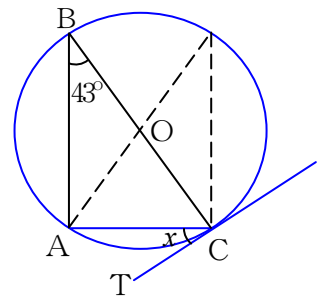



그림 4-27

**정리 4. 원둘레의 한 점에서 활줄과 접선을 그었을 때 그사이의 각은 그 각 아낙에 있는 활등에 대한 원둘레각과 같다.**

조건. CT는 접선
결론. ∠ACT＝∠ABC

(증명) 활줄 AC와 접선 CT가 만드는 두 각가운데서 뾰족각을 ∠ACT라고 하자.

이제 직경 $CB_1$을 그으면 $\angle B_1AC = \angle R$

(직경에 대한 원둘레각)

따라서 $\angle AB_1C + \angle ACB_1 = \angle R$ (1)

그리고 $\angle ACT + \angle ACB_1 = \angle R$(접선의 성질) (2)

따라서 (1), (2)에 의하여

$\angle AB_1C = \angle ACT$ $(= \angle R - \angle ACB_1)$

여기서 $\angle AB_1C = \angle ABC$(AC에 대한 원둘레각)

따라서 ∠ABC=∠ACT

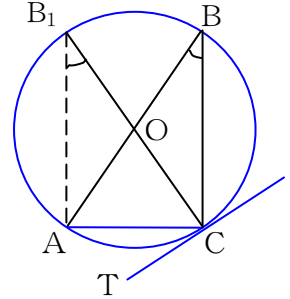



그림 4-28

## 문 제

1. 활줄 AC와 접선 CT가 만드는 각이 무딘각일 때 정리 4를 증명하여라.

2. 원바깥의 한 점 A에서 그림 4−29와 같이 접선 AM과 가름선 ABC를 그었다.

∠A=20°, ∠C=24°일 때

1) ∠AMB는 몇도인가?

2) ∠MBC는 몇도인가?

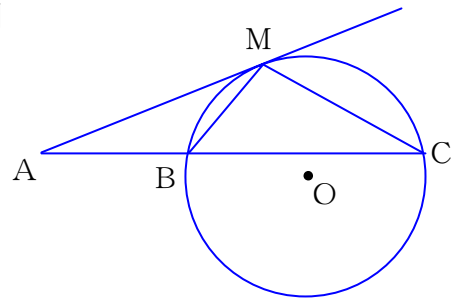



그림 4-29

3. 원 O의 활등 $\overset{\frown}{AB}$의 가운데점 C에서 그은 접선 ℓ은 활줄 AB에 평행이다. 증명하여라.

4. TC는 원 O의 접선이다. 활줄 AC의 끝점 A에서 AB∥TC 되게 직선 AB를 그었다.(그림 4−30)

1) △ABC는 어떤 3각형인가? $\angle BCT_1 = \angle ACT$라고 말할수 있는가?

2) 직선 OC를 축으로 접으면 A와 B, 반직선 CT와 $CT_1$이 겹치겠는가?

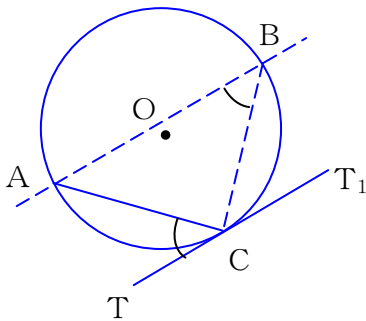



그림 4-30

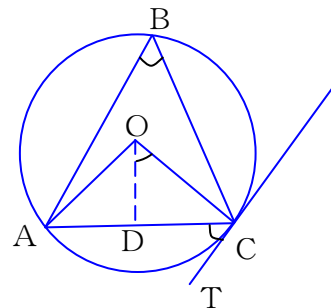



그림 4-31

**알아보기** 그림 4－31에서 ∠B＝∠ACT이다. ∠OCT＝∠R(즉 CT가 접선)이겠는가?
△ODC를 보고 생각하여라.

**정리 5.** 원둘레의 한 점에서 그은 활줄과 직선사이의 각이 이 각에 있는 활등에 대한 원둘레각과 같으면 그 직선은 원의 접선이다.

**조건.** 그림 4－32에서 ∠ABC＝∠ACT이면
**결론.** TC는 접선이다. (즉 OC⊥TC이다.)
**(증명)** TC가 접선이 아니라고 해보자.
이제 그림 4－32의 점 C에서 원 O에 접선 $CT_1$을 긋자. 그러면 정리 4에 의하여

$$\angle ABC = \angle ACT_1$$

한편 $\angle ABC = \angle ACT$

따라서 TC가 접선이 아니라고 한것이 잘못이다.
따라서 TC는 원 O의 접선이다.

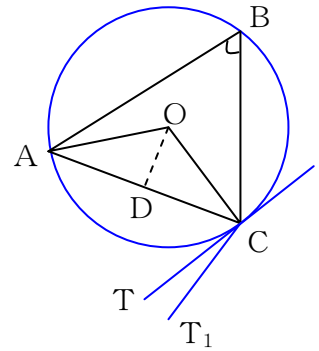



그림 4-32

**귀유법**

명제 《$p$이면 $q$이다》를 다음과 같이 증명할수 있다.

① 먼저 《$p$이지만 $q$아니다》라고 해본다. (가정한다.)

② 이때 이미 알고있는것과 모순된다는것을 밝힌다.

③ 따라서 《$p$이면 $q$이다》로 될수밖에 없다.

## 문 제

1. 《직선 $\ell$밖의 한 점 M에서 그 직선에 수직선을 하나밖에 그을수 없다.》를 귀유법으로 증명하여라.
2. 《4각형의 네 아낙각가운데 180°보다 큰 각은 하나보다 많을수 없다.》를 증명하여라.
3. 《세 점 A, B, C에서 AB＋BC＝AC이면 이 세 점은 한 직선에 놓인다.》를 증명하여라.

## 련 습 문 제

1. 원에 내접하는 4각형 ABCD를 그리고 대각선을 그어라. 이때 같은 각들을 모두 말하여라.
2. △ABC에서 ∠B=30°이다. 점 A와 C에서 각각 △ABC의 외접원에 접선을 긋고 접선들이 사귀는 점을 D라고 하자.
   이때 ∠ADC를 구하여라.
3. 그림 4—33에서 DE는 주어진 원의 접선이다.
   ∠DAB=60°, ∠CAE=50°이다.
   △ABC의 아낙각들은 각각 얼마인가?
4. 원 O에서 활줄 AB와 접선 AC사이의 각이 60°일 때 그 각 아낙에 있는 활등 $\overset{\frown}{AB}$가 품는 각은 얼마인가?(그림 4—34)
5. 영웅적조선인민군의 한 어뢰정(F)에서 등대 A, B, C를 보는 각을 재였더니 ∠AFB=40°, ∠BFC=30°였다.
   등대의 자리가 표시되여있는 지도에서 어뢰정이 있는 자리를 말하여라.(그림 4—35)

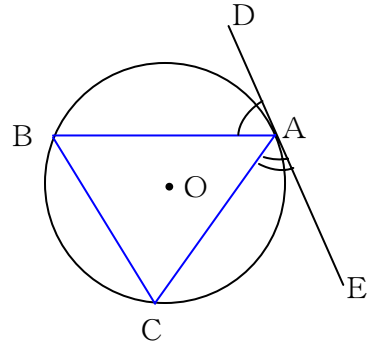



그림 4-33

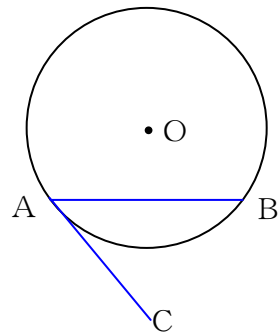



그림 4-34

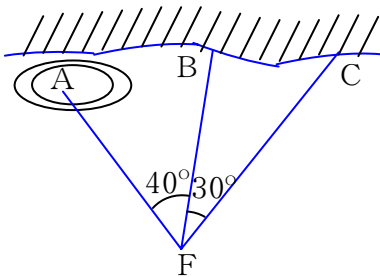



그림 4-35

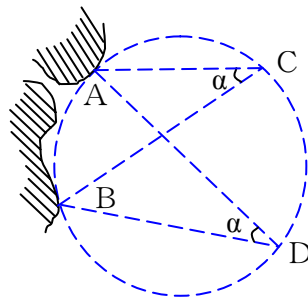



그림 4-36

6. 배에서 두 등대 A, B를 보는 각을 재여서 배가 위험구역에 들어가지 않도록 할수 있다. 활줄 AB에 대한 어떤 활등의 아낙이 위험구역이고 그 활등이 품는 각 $\alpha$를 알고있다고 한다.(그림 4—36) 위험구역밖에 있으려면 A, B를 보는 방향사이의 각의 크기가 얼마여야 하는가?

7. 그림 4−37에서 $\angle x$를 구하여라.

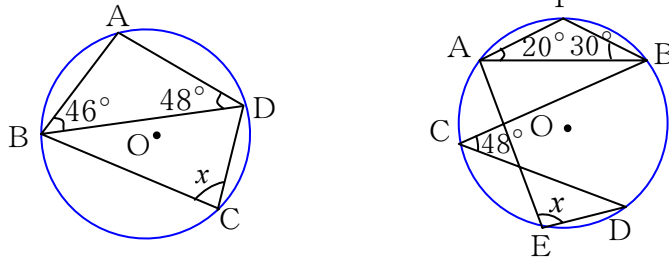



그림 4−37

8. 그림 4−38에서 직선 PQ, PR는 원 O의 접선이다. 그림에서 $x$를 구하여라.

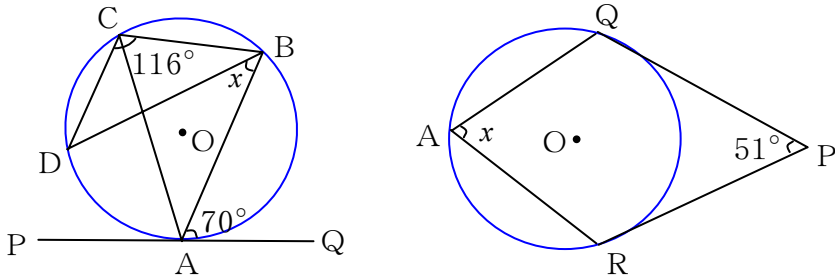



그림 4−38

9. 원둘레 O의 점 C에서 이 원에 접선을 하나만 그을수 있다는것을 귀유법으로 증명하여라.

10. 두 점 A, B에서 사귀는 두 원 O, $O_1$이 있다. 점 B를 지나는 한 직선이 두 원둘레와 다시 사귀는 점을 M, $M_1$로 표시하자. 이때

1) $\angle AMB$와 $\angle AOO_1$, $\angle AM_1B$와 $\angle AO_1O$를 각각 비교하여라.

2) $\angle MAM_1$과 $\angle OAO_1$을 비교하여라.

11. 평행인 두 직선 $\ell$과 $\ell_1$이 원둘레 O와 사귀는 점을 A와 B, $A_1$과 $B_1$로 표시한다. 원둘레 O에서 이 네 점 이외의 임의의 점을 M으로 표시할 때 $\angle AMA_1$과 $\angle BMB_1$을 비교하여라.(있을수 있는 여러가지 경우로 나누어 생각하여라.)

12. 3각형 ABC의 $\angle B$, $\angle C$의 2등분선의 사귐점을 I, 또 BI, CI의 연장선이 외접원과 사귀는 점을 각각 D, E라고 할 때 DI＝EI이면 3각형 ABC는 어떤 3각형인가?

## 제3절. 원과 4각형

**해보기** 그림 4－39와 같이 원에 내접하는 4각형이 있다. 맞은각의 합을 구해보아라.

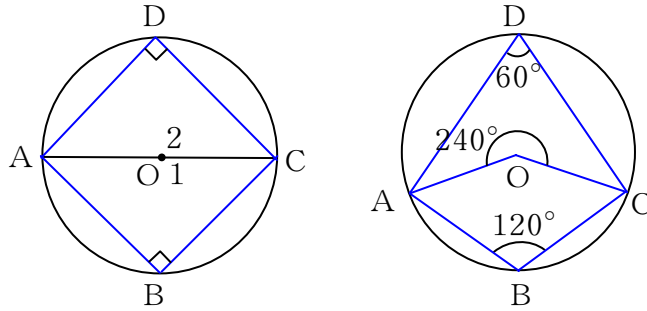



그림 4－39

**정리 6. 원에 내접하는 4각형에서 맞은각의 합은 $2\angle R$이다.**

**조건.** 4각형 ABCD는 원 O에 내접한다.
**결론.** $\angle B+\angle D=\angle A+\angle C=2\angle R$

**(증명)** $\angle D=\dfrac{\alpha}{2}$ ($\overset{\frown}{ABC}$에 대한 원둘레각)

$\angle B=\dfrac{\beta}{2}$ ($\overset{\frown}{ADC}$에 대한 원둘레각)

따라서 $\angle B+\angle D=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}\cdot 4\angle R=2\angle R$

즉 $\angle B+\angle D=2\angle R$
마찬가지로 $\angle A+\angle C=2\angle R$

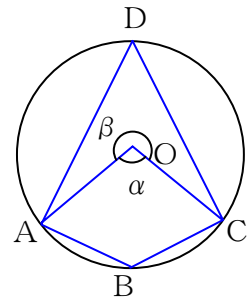



그림 4－40

### 문 제

1. 그림 4－41에서 $\angle B=70°$, $\angle C=85°$이다. $\triangle ADE$의 아낙각들을 구하여라.

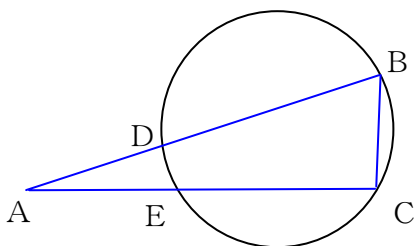



그림 4－41

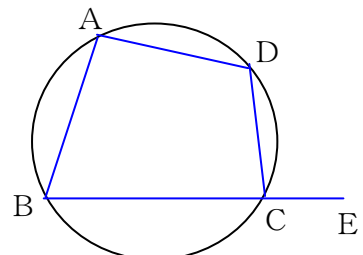



그림 4－42

2. 원에 내접하는 4각형에서 한 바깥각은 그 정점의 맞은각과 같다.
그림 4－42를 보고 조건과 결론을 갈라쓰고 증명하여라.

4각형 ABCD에서 ∠A＝∠C＝∠R이다.

이때 4각형은 원에 내접하겠는가?

세 점 A, D, C를 지나는 원을 그리고 생각하여보아라.

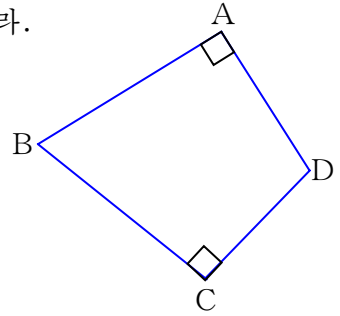



그림 4－43

**정리 7.(정리 6의 거꿀정리)**
**4각형의 맞은각의 합이 2∠R이면 그 4각형은 원에 내접한다.**

**조건.** 4각형 ABCD에서 ∠B＋∠D＝2∠R

**결론.** 4각형 ABCD는 원에 내접한다.

**(증명)** 귀유법으로 증명하자.

세 점 A, B, C를 지나는 원둘레가 점 D를 지나지 않는다고 가정하자.(점 D가 원안에 있다고 하자.)

직선 AD가 원둘레와 사귀는 점을 $D_1$이라고 하고 C와 $D_1$을 맺자.

그러면 ∠B＋∠$D_1$＝2∠R (정리 6)

그런데 ∠B＋∠ADC＝2∠R (조건)

이 두 식을 비교하면 ∠D＝∠$D_1$

이것은 3각형의 바깥각의 성질에 어긋난다. 따라서 점 D도 그 원둘레에 놓일수밖에 없다. 점 D가 원밖에 있는 경우도 마찬가지로 증명된다.

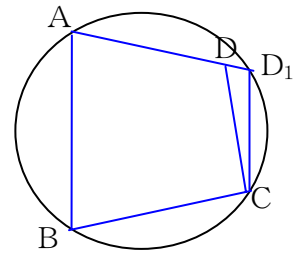



그림 4－44

**네 점이 한 원둘레에 놓일 조건**

1) 두 점 C, D가 직선 AB에 관하여 같은쪽에 있을 때
∠ACB＝∠ADB이면 A, B, C, D는 한 원둘레에 놓인다.

2) 두 점 C, D가 직선 AB에 관하여 반대쪽에 있을 때
∠ACB＋∠ADB＝2∠R이면 A, B, C, D는 한 원둘레에 놓인다.

4각형 ABCD가 원에 외접하였을 때 접선의 성질을 쓰면 (그림 4－45)

$$AB+CD=BC+AD$$

라는것을 쉽게 알수 있다.

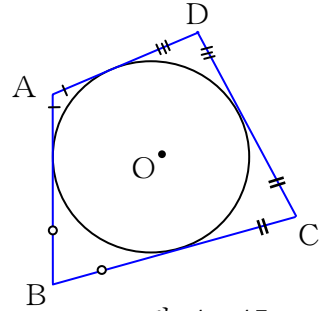



그림 4－45

4각형이 원에 외접하면 그 4각형의 맞은변의 합은 같다.
그 거꿀도 성립한다.

## 문 제

1. 정리 7의 증명에서 점 D가 원밖에 놓이는 경우를 증명하여라.
2. 1) 평행4변형가운데서 원에 내접하는것은 무슨 4각형인가?
   2) 직4각형을 하나 그리고 외접원을 그려라.
   3) 제형가운데서 원에 내접하는것은 무슨 제형인가?
   4) 바른제형을 하나 그리고 그 외접원을 그려라.
3. 제형 ABCD(AD∥BC)에서 B, C를 지나는 원둘레가 두 옆변과 사귀는 점을 E, F라고 하면 네 점 A, E, F, D는 한 원둘레에 있다. 증명하여라.(그림 4－46)

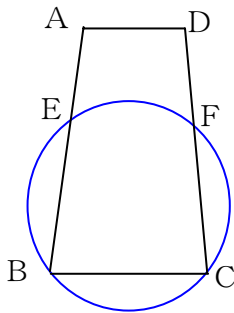



그림 4－46

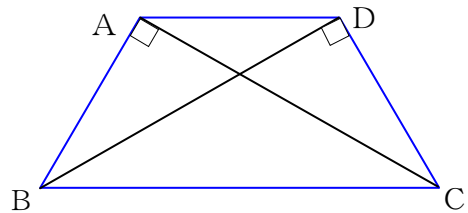



그림 4－47

4. 4각형 ABCD(AD∥BC)에서 ∠BAC＝∠BDC＝∠R이면 ∠DBC＝∠DAC이다. 증명하여라.(그림 4－47)
5. 바른4각형 ABCD의 내접원의 중심 O와 점 A를 지나는 원이 변 AB, AD와 각각 점 P, Q에서 사귈 때 AP＋AQ＝AB이다. 증명하여라.

## 련 습 문 제

그림 4－48

1. △ABC에서 두 높이 BE, CF의 사귐점을 H로 표시하자. (그림 4－48)
   1) 이 도형에 표시된 점들가운데서 한 원둘레에 놓이는 네 점을 모두 말하여라.
   2) ∠EBC＝∠HAE이다. 증명하여라.
   3) AD⊥BC를 증명하여라.
   4) ∠HDB와 ∠HEA를 비교하여라.
   (△ABC의 세 높이의 사귐점 H를 **수심**이라고 부른다.)
2. △ABC에서 세 높이 AD, BE, CF를 그었다. (수심 H) DA는 ∠EDF를 2등분한다. 증명하여라. (그림 4－49)

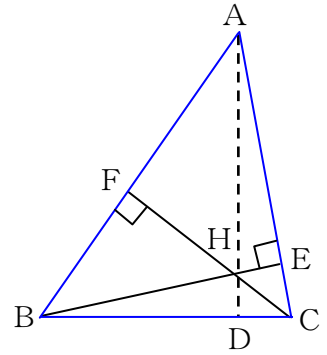
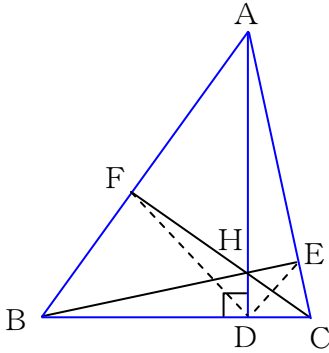



그림 4－49

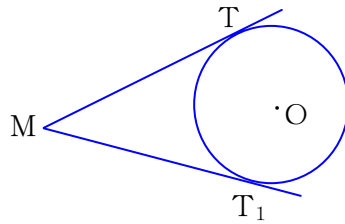



그림 4－50

3. 1) 한 점 M에서 원둘레 O에 접선 MT, $MT_1$을 그으면 $MT=MT_1$이다. 왜 그런가? (그림 4－50)
   2) 4각형 ABCD가 원 O에 외접하면 AB＋CD＝AD＋BC이다. 거꿀명제를 증명하여라.
4. △ABC의 변 BC, CA, AB에 각각 점 D, E, F를 찍었다.
   1) 두 원둘레 AFE와 BFD의 둘째 사귐점을 M으로 표시할 때 ∠EMD와 ∠A＋∠B를 비교하여라.
   2) 원둘레 CDE는 점 M을 지난다는것을 증명하여라.
5. △ABC가 있다. 두 직선 AB와 AC에 각각 점 D, E를 찍고 원둘레 ABC에 점 M을 찍는다. 두 원둘레 BDM과 CEM의 둘째 사귐점을 P로 표시하면
   1) ∠MPD와 ∠MPE를 비교하여라.
   2) 세 점 P, D, E는 한 직선에 놓인다는것을 증명하여라.
6. 4각형 ABCD와 직선 BC에 한 점 M이 있다. 두 원둘레 ABM과 CDM이 다시 사귀는 점을 P로 표시한다.
   1) 두 직선 AB와 CD가 점 E에서 사귈 때 점 P는 원둘레 AED에 놓인다는것을 증명하여라.

2) ∠PAD와 ∠PED를 비교하여라.

3) AB∥CD일 때 점 P는 직선 AD에 놓인다는것을 증명하여라.

7. 두 점 A와 B에서 사귀는 두 원 O와 $O_1$이 있다. 원둘레 O에 한 점 C를 찍고 원둘레 $O_1$에 직선 CA에 놓이지 않는 한 점 D를 찍었다. 점 B를 지나는 한 직선이 원둘레 O, $O_1$과 사귀는 점을 각각 M, N으로 표시한다.

이때 직선 CM과 DN의 사귐점을 R로 표시하면 네 점 A, C, R, D는 한 원둘레에 놓인다는것을 증명하여라.

**상 식**

3각형의 5심과 9점원

3각형의 외심(세 변의 수직2등분선의 사귐점), 내심(세 아낙각의 2등분선의 사귐점), 수심(세 높이의 사귐점), 무게중심(세 가운데선의 사귐점), 방심(한 아낙각과 그에 붙어있지 않는 두 바깥각의 2등분선의 사귐점)을 3각형의 5심이라고 부른다. 3각형에서 세 변의 가운데점, 세 높이의 밑점, 수심과 세 정점을 련결하는 선분들의 가운데점들로 이루어진 9개의 점들은 한 원둘레에 놓인다. 이 원을 9점원이라고 부른다.

## 제4절. 회전이동

### 1. 회전이동

평면 P에 있는 점 모두를 그 평면의 점 O주위로 회전하면 평면 P에 있는 도형 F는 평면 P의 다른 도형 $F_1$로 넘어간다.

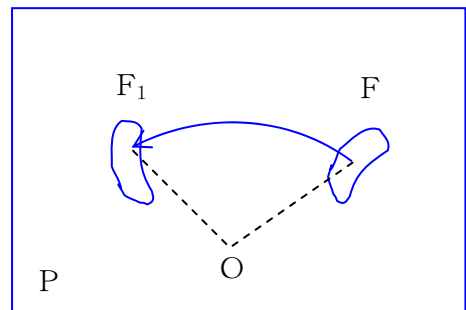



그림 4-51

평면 P에 한 점 O와 회전각 $\alpha$가 있을 때 평면 P의 모든 점을 각각 점 O를 중심으로 하여 각 $\alpha$만큼 회전시켜 넘기는것을 회전이동이라고 부르며 $O(\alpha)$와 같이 표시한다.

회전각은 시계바늘이 도는 방향과 반대일 때에는 정수로 표시하고 같은 방향일 때에는 부수로 표시한다.(그림 4－52)

그림 4-52

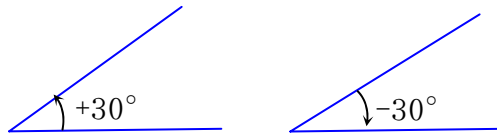
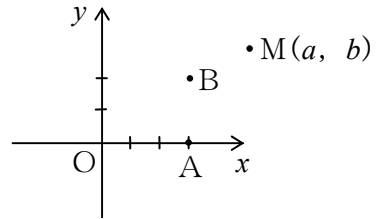
### 문 제

1. 회전이동 O($\alpha$)에 의해서 중심이 O인 원둘레는 어떤 도형으로 넘어가는가?
2. 두 점 A, O가 있다.(그림 4－53)
   $\alpha=30°$ 일 때 회전이동 O($\alpha$), O($2\alpha$), O($3\alpha$)에서 각각 A의 대응점을 구하여라.

그림 4-53　　　　　그림 4-54

3. 회전이동 O(90°)에서(그림 4－54)
   1) 점 A(3, 0), B(3, 2)의 대응점 $A_1$, $B_1$의 자리표를 구하여라.
   2) 점 M($a$, $b$)의 대응점 $M_1$의 자리표를 ($a_1$, $b_1$)라고 하고 $a$, $b$로 표시하여라.

## 2. 회전이동의 성질

**회전이동에 의해서 선분은 그와 같은 길이의 선분으로 넘어간다.**

(증명) 회전이동을 O($\alpha$), 한 선분을 AB라고 하자.(그림 4－55)
$A \to A_1$, $B \to B_1$이라 하고 선분 $A_1B_1$을 그으면 $\triangle OA_1B_1$와 $\triangle OAB$에서

$$OA_1=OA,\ OB_1=OB$$
$$\angle A_1OB_1=\angle AOB(=\alpha-\angle BOA_1)$$
$$\therefore\ \triangle OA_1B_1\equiv\triangle OAB$$
$$\therefore\ A_1B_1=AB$$
$$\angle OA_1B_1=\angle OAB$$

따라서 선분 AB는 선분 $A_1B_1$로 넘어간다.

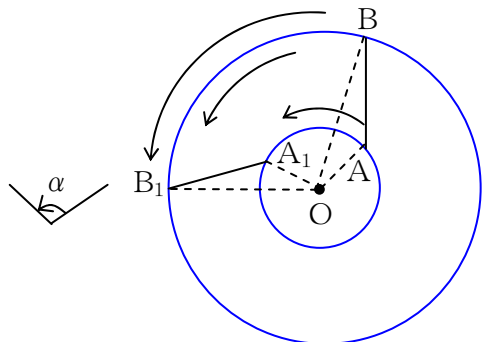



그림 4-55

**회전이동에 의하여 반직선은 반직선으로, 직선은 직선으로 넘어간다.**

마찬가지로 다음의 성질을 증명할수 있다.

**회전이동에 의해서 3각형은 그와 합동인 3각형으로 넘어간다.**

**례** 바른5각형의 외접원을 그려라.

그림 4-56

먼저 그림 4−56에서 △ABC의 외심을 O라고 할 때 점 D, E도 원둘레 O에 놓인다는것을 보자.

AB=BC(조건)이므로

∠AOB=∠BOC, OA=OB=OC

그러므로 회전이동 O(∠AOB)에 의해서

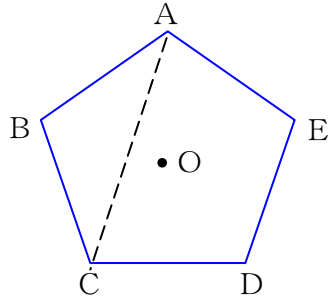
A→B, B→C

따라서 AB→BC

그런데 ∠B=∠C, BC=CD(조건)이므로 이 회전이동에서 C→D

그러므로 점 D도 원둘레 O에 있다.

점 E에 대하여도 꼭 마찬가지로 말할수 있다.

따라서 △ABC의 외접원을 그리면 바른5각형 ABCDE의 외접원이 된다.

## 문 제

1. 원 O에 내접하는 바른5각형 ABCDE가 있다.(그림 4−57)

   1) 회전이동 O($\frac{4}{5}$∠R)에서 대각선 AC는 어떤 선분으로 넘어가는가? 5각형 $A_1B_1C_1D_1E_1$은 어떤 도형으로 넘어가는가?

   2) 5각형 $A_1B_1C_1D_1E_1$은 바른5각형이다. 증명하여라.

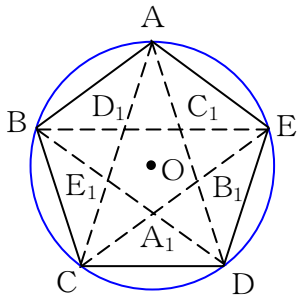
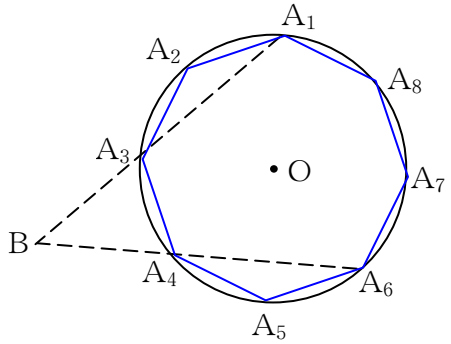



그림 4-57　　　그림 4-58

2. 원 O에 내접하는 바른8각형이 있다.(그림 4−58)

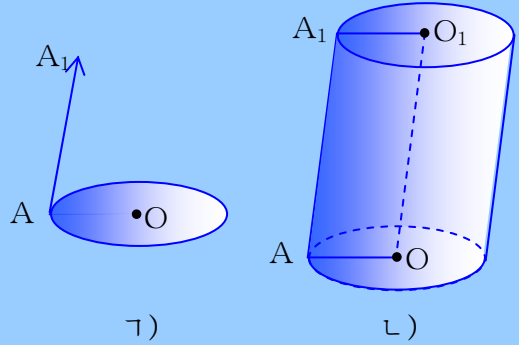
   1) 회전이동 O(∠$A_1OA_4$)에서 직선 $A_1A_3$은 어떤 직선으로 넘어가는가?

2) 직선 $A_1A_3$과 $A_4A_6$의 사귐점을 B라고 할 때 $\angle A_3BA_4$를 구하여라.

**탐 구**

평면에 점 O와 빗선 $A_1A$가 있다. $AA_1$방향으로 원 O(OA)를 평행이동하면 그림 ㄴ)과 같은 기둥이 얻어진다.

1) 직선 $OO_1$을 축으로 4각형 $OO_1A_1A$를 한바퀴 돌리면 기둥 ㄴ)이 얻어지겠는가?

2) 기둥 ㄴ)을 직선 $OO_1$에 수직인 평면으로 자르면 자름면이 원이겠는가?

## 련습문제

1. △ABC의 변 AB, AC를 각각 한 변으로 하여 3각형의 바깥에 바른4각형 ABDE, ACFG를 그렸다.(그림 4−59)

   1) 회전이동 A(90°)에 의해서 △AEC는 어떤 도형으로 넘어가는가?

   2) BG⊥EC이다. 증명하여라.

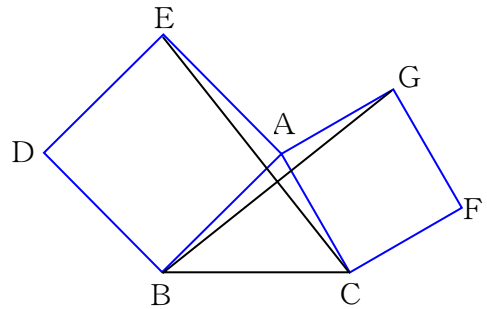



그림 4-59

2. 바른7각형 ABCDEFG가 있다.(그림 4−60) 회전이동의 성질을 써서 대각선 AD와 BE사이의 각을 구하여라.

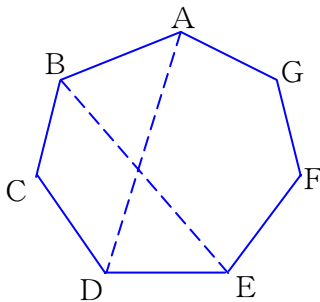



그림 4-60

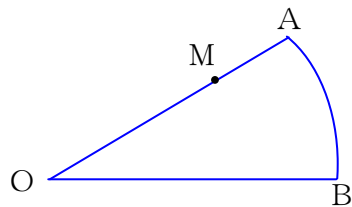



그림 4-61

3. 부채형 OAB의 반경 OA에 한 점 M이 있다.(그림 4−61) 점 M을 직각의 정점으로 하는 직2등변3각형 NMP를 그리되 점 N은 반경 OB에 있고 점 P는 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 있게 하여라.

4. 원 O와 그 바깥에 한 점 A 및 원둘레 O에 외접하는 원둘레 $O_1$이 있다.(그림 4－62)
원 $O_1$이 원둘레 O를 따라 굴러가서 점 A에 접할 때의 그림을 그려라.

5. 뾰족3각형 ABC의 변 AC와 BC를 변으로 하는 바른3각형 ACE와 BCD를 3각형 바깥쪽에 그릴 때 BE와 AD사이의 각은 얼마인가?

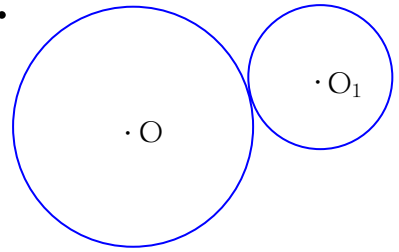



그림 4-62

## 복습문제

1. 그림 4－63에서 직경 CD⊥AB, ∠ACD＝20°이다. ∠BOD를 구하여라.

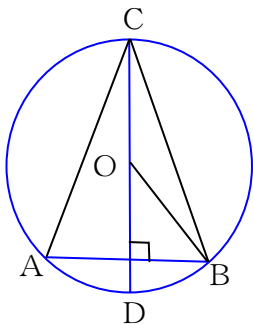



그림 4-63

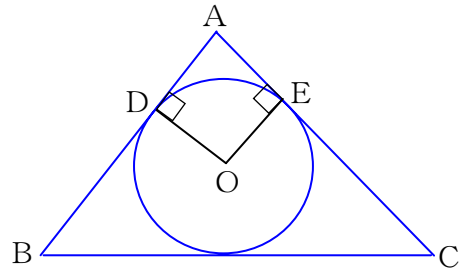



그림 4-64

2. 직3각형 ABC에서 AB＝6cm, BC＝10cm, CA＝8cm일 때 △ABC의 내접원 O의 반경의 길이를 구하여라.(그림 4－64)

3. 1) 평행인 직선 AB와 CD를 긋고 이것들과 사귀는 한 직선 AC를 그어라. 이때 세 직선에 접하는 원 O를 그려라.
   2) 이 도형에서 ∠AOC＝∠R라는것을 증명하여라.

4. 1) 활등 $\overset{\frown}{AB}$의 가운데점을 C라고 하면 반직선 AC는 점 A에서 그은 접선과 활줄 AB사이의 각을 2등분한다. 증명하여라.(그림 4－65)

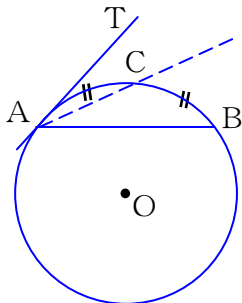



그림 4-65

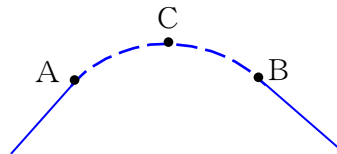



그림 4-66

2) 어떤 길을 닦는데 A에서 B까지의 굽인돌이를 활등모양으로 하려고 한다. 원의 중심을 쓰지 않고 $\overset{\frown}{AB}$의 가운데점 C의 자리를 찾으려면 어떻게 하겠는가?(그림 4－66)

5. 원에 외접하는 평행4변형이 등변4각형이라는것을 증명하여라.

6. 그림 4－67에서 활등 $\overset{\frown}{AB}$는 원둘레의 $\frac{1}{5}$이다. ∠AOB와 ∠ADB를 구하여라.

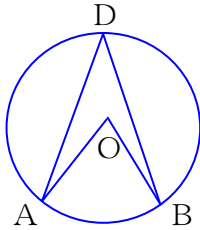



그림 4-67

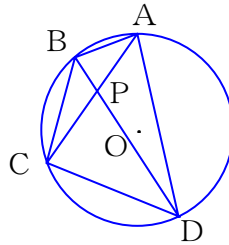



그림 4-68

7. 4각형 ABCD가 원에 내접하였다.(그림 4－68)

$$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=1:2:3:4$$

1) ∠ADB, ∠CAD, ∠ACD, ∠CBD를 구하여라.

2) 대각선 $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$의 사귀점을 P라고 할 때 DC＝DP라는것을 증명하여라.

8. 원에서 활등 AB와 CD가 같을 때

1) ∠ADB＝∠DAC이다. 왜 그런가?

2) AD∥BC라는것을 증명하여라.

3) 4각형 ABCD는 어떤 4각형인가? 여러가지 경우로 생각하여보아라. 어떤 경우에 직4각형이 되고 어떤 경우에 바른제형이 되겠는가?

9. AB＝AC인 2등변3각형 ABC의 ∠B, ∠C의 2등분선이 3각형의 외접원과 사귀는 점을 D, E라고 하면 BD＝CE이다. 증명하여라.

10. △ABC의 수심을 H로 표시할 때 그 3각형의 변에 관한 H의 대칭점은 3각형의 외접원에 놓인다. 증명하여라.

11. 원 O 및 이 원밖에 한 직선 $\ell$이 있다. 원 O에 서로 수직인 두 직경을 긋고 그 연장선들이 직선 $\ell$과 사귀는 점을 각각 P, Q로 표시한다.
이때 점 P에서 원둘레 O에 그은 접선이 점 Q에서 원둘레 O에 그은 두 접선과 사귀는 네 점은 한 원둘레에 놓인다는것을 증명하여라.

12. △ABC의 외접원의 한 점 M에서 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선에 그은 수직선의 밑점을 각각 $A_1$, $B_1$, $C_1$로 표시하자. 이 도형에서 한 원둘레에 놓이는 네 점들을 모두 찾아라.

1) $∠B_1A_1C$와 $∠C_1A_1B$를 비교하여라.

2) 세 점 $A_1$, $B_1$, $C_1$은 한 직선에 놓인다는것을 증명하여라.

13. 그림 4-69에서 AB, CD는 원 O의 직경이고 점 B는 활등 $\overset{\frown}{DE}$의 2등분점이다. $\angle BDE=24°$일 때 각 $x$, $y$, $z$를 구하여라.

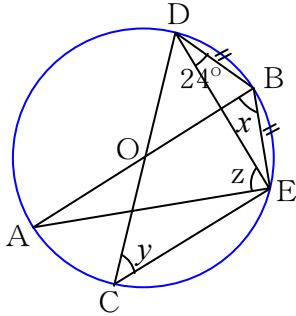



그림 4-69

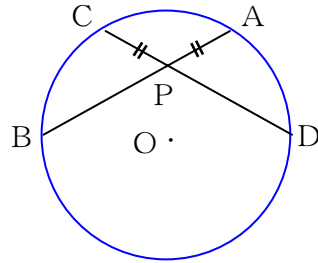



그림 4-70

14. 그림 4－70에서 AB, CD는 두 활줄이고 P는 그 사귐점이다. AP＝CP이면 BP＝DP라는것을 증명하여라.

15. 바른4각형 ABCD가 원에 내접하였다. 활등 $\overset{\frown}{CD}$에 점 E를 잡고 D, E와 B, E를 각각 맺자.(CD와 BE의 사귐점을 G라고 한다.) DE의 연장선과 BC의 연장선의 사귐점을 F라고 하면 CG=CF이다. 증명하여라.(그림 4－71)

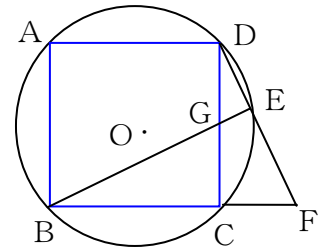



그림 4-71

16. 4각형 ABCD는 원 O에 외접하고 $\angle C=90°$, P, Q, R, S는 접점이다.

원 O의 반경을 구하여라.(그림 4－72)

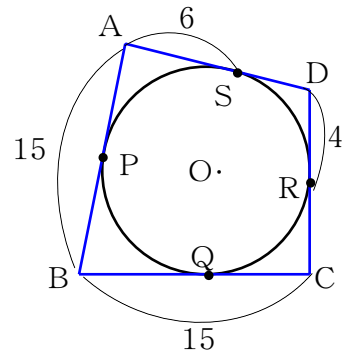



그림 4-72

17. 1) 한 점 A를 지나며 반경이 3cm인 원둘레의 중심들의 모임은 어떤 도형인가?

2) 너비 6cm인 비닐판이 있다. 그림 4－73과 같이 한 점 A를 지나는 반원둘레를 따라 베여서 끝을 둥글게 하려고 한다. 금을 어떻게 긋겠는가?

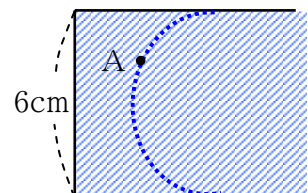



그림 4-73

18. 밑변 AB=4cm, 정각 ∠C=100°, 높이 1.5cm인 △ABC를 그려라.

19. 그림 4−74는 한 기구의 테두리선의 그림이다. 이 그림에서 두 원의 공통접선들을 찾아내여라.

20. 다음과 같이 원 O와 $O_1$의 공통외접(내접)선을 그어라.

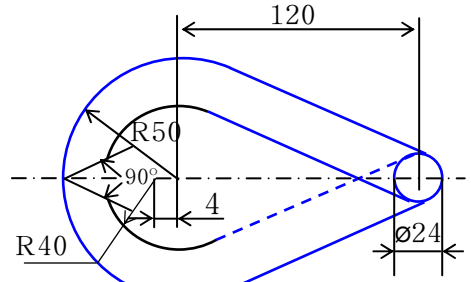



그림 4-74

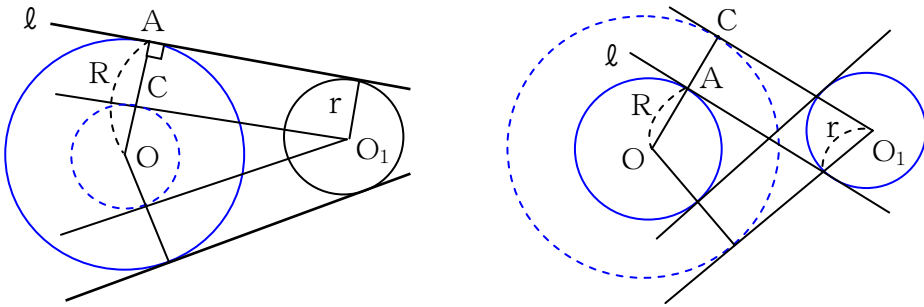



그림 4-75

원 O와 $O_1$의 반경을 R, r(R>r)라고 한다.

1) 중심 O, 반경이 R−r(R+r)인 원을 그린다.(그림 4−75)

2) 점 $O_1$에서 이 원둘레에 접선을 긋고 접점을 C라고 한다.

3) 반직선 OC가 주어진 원둘레 O와 사귀는 점 A에서 $O_1C$에 평행인 직선 ℓ은 원 O와 $O_1$에 접하게 된다. 왜 그런가?

# 제5장. 근사값과 그 계산

근사값과 오차

근사값의 계산

수의 표준지수형식

$$A=a\cdot10^n$$

## 제1절. 근사값과 오차

### 1. 정확한 값과 근사값

정확한 값에 가까운 값을 근사값이라고 불렀다.
생활에서는 정확한 값과 함께 근사값도 많이 쓰인다.

**알아보기**

1) 학철이네 학급학생을 세여보니 23명이다. 이때 23은 정확한 값인가?
2) 정철이는 교실의 길이를 재여 9m를 얻었다.
이때 9m는 0.001mm도 차이나지 않는 정확한 값이라고 말할수 있는가?
3) 어느 군의 인구가 12만명이다. 이때 12만은 한명의 차이도 없는 정확한 값이겠는가?
4) $\frac{1}{6}$을 소수로 0.167이라고 표시할 때 0.167은 정확한 값인가?

**근사값을 얻게 되는 경우**

1) 길이, 면적, 체적, 질량 등 량을 잴 때
2) 많은 수의 물건을 대략 셀 때
3) 정확한 값을 반올림하거나 잘라버릴 때

### 문 제

다음 글에 나오는 수가운데서 정확한 값과 근사값을 찾아라.
1) 성숙이는 어제 밤 수학문제를 13문제 풀었다.
2) 어제 낮 최고기온은 17℃였다.
3) 지구에서 달까지 거리는 약 380 000km이다.
4) 지금 바람의 속도는 12m/s이다.
5) 1을 3으로 나눈 상이 0.333이다.
6) 연풍호의 면적은 14.87km$^2$이다.
7) 원둘레률은 $\pi$이다.
8) 철호는 지난해에 토끼를 16마리 길렀다.

**근사값의 표시**

$a$가 A의 근사값이라는것을 다음과 같이 표시한다.

$$A \approx a$$

## 문 제

다음 □에 ＝와 ≈가운데서 알맞는 기호를 써넣어라.

1) $\frac{4}{5}$□0.8　　2) $\frac{1}{3}$□0.33　　3) $\frac{22}{7}$□3.14　　4) 2.6(8)□2.7

## 2. 오차와 그 한계

**알아보기** $\ell$＝3.368의 근사값으로 영철이는 3.4를, 순희는 3.37을 잡았다. 누가 잡은 근사값이 실제값에 더 가까운가? 그것을 어떻게 하면 알수 있겠는가?

정확한 값 A에서 그의 근사값 $a$를 덜 차 A$-a$를 근사값 $a$의 오차라고 부른다.

$a>$A일 때 $a$를 넘는근사값, $a<$A일 때 $a$를 모자란근사값이라고 부른다.

## 문 제

1. 모자란근사값과 넘는근사값의 오차의 부호를 말하여라.
2. 소수점아래 어떤 자리부터 잘라버리면 넘는근사값을 얻는가 또 모자란근사값을 얻는가? 반올림할 때는 어떤 근사값을 얻는다고 말할수 있는가?
3. A＝5.1672의 근사값으로 다음과 같이 값들을 취할 때 오차를 구하여라.

   1) $a$＝5.17　　2) $a$＝5.16　　3) $a$＝5

   4) $a$＝5.167　　5) $a$＝6　　6) $a$＝5.168
4. 근사값 $a$와 그 오차가 다음과 같을 때 정확한 값 A를 구하여라.

   1) $a$＝312, (오차)＝$-$0.6　　2) $a$＝5.6, (오차)＝0.07

   3) $a$＝1.156, (오차)＝$-$0.0013　　4) $a$＝0.52, (오차)＝0.007

**알아보기** 1) 오차가 정수인가 부수인가에 따라 어느 근사값이 정확한 값에 더 가까운가를 알수 있는가?

2) A＝71.5일 때 A의 근사값으로

$$a_1=72,\ a_2=71,\ a_3=71.8,\ a_4=71.3$$

을 잡을 때 어느 근사값이 정확한 값에 가장 가까운가? 왜 그렇게 말할수 있는가?

오차의 절대값을 절대오차라고 부른다. 근사값 $a$의 절대오차를 $\triangle_a$로 표시한다. 즉

$$\triangle_a = |A - a|$$

《$\triangle_a$》를 《델타 에이》라고 읽는다.

절대오차가 작을수록 근사값은 정확한 값에 더 가깝다.

### 문 제

정확한 값과 근사값이 다음과 같을 때 근사값의 절대오차를 구하여라.

1) $A = 16.42$, $a = 16.4$
2) $A = 24.3$, $a = 24.35$
3) $A = 0.26$, $a = 0.258$
4) $A = 2.718$, $a = 2.7$
5) $L = \frac{2}{3}$, $\ell = 0.666$
6) $L = \frac{2}{7}$, $\ell = 0.28$

**알아보기** 수지연필심의 길이를 재여 6cm를 얻었다.

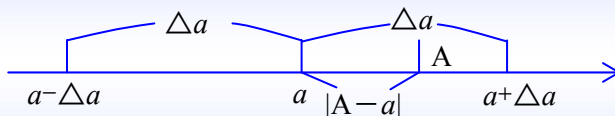
1) 이때 절대오차가 얼마인가를 말할수 있는가?
2) 실제길이가 5cm보다는 크고 7cm보다는 작다고 찍어서 말할 수 있는가?
3) 절대오차가 1cm를 넘지 않을것이라고 말할수 있는가?

실천에서는 정확한 값을 모르고 근사값을 다루는 때가 많다. 이런 때에는 오차를 구할수 없다. 그러나 절대오차가 기껏 얼마를 넘을수 없다는것은 알수 있다.

절대오차가 기껏해서 $\triangle a$를 넘지 않을 때 즉

$$\triangle_a = |A - a| \leq \triangle a$$

일 때 $\triangle a$를 근사값 $a$의 절대오차한계라고 부른다.

$$|A - a| \leq \triangle a \Leftrightarrow a - \triangle a \leq A \leq a + \triangle a$$



A의 근사값 $a$의 절대오차한계가 $\triangle a$라는것을

$$A = a \pm \triangle a$$

와 같이 표시한다.

$$A = a \pm \triangle a \Leftrightarrow a - \triangle a \leq A \leq a + \triangle a$$

## 문 제

1) $\pi=3.1415926\cdots$의 근사값으로 $\pi\approx3.14$를 취할 때 0.002, 0.001 6, 0.001 593들은 절대오차한계로 될수 있는가?

2) 책상의 길이를 $\ell=120\text{cm}\pm0.5\text{cm}$라고 할 때 이것은 무엇을 의미하는가?

절대오차한계는 될수록 작게 잡는다.

**례 1** 영철이의 키를 재여 155.4cm를 얻었다. 이때 영철이의 키는 분명히 155cm보다는 크고 156cm보다는 작다고 볼수 있다.

영철이의 정확한 키를 Acm라고 하면

$$\triangle_{\ell}=|A-155.4|\leq1$$

이리하여 절대오차한계는 1cm로 취할수 있다.

또한 영철이의 정확한 키가 155.3cm와 155.5cm사이에 있다는것이 확정적이라면 절대오차한계를 0.1cm로 잡는다.

**례 2** $\pi=3.141592\cdots$

$\pi\approx3.14$

$\triangle_{\pi}=0.001592\cdots$

$\triangle\pi=0.002$ 또는 $\triangle\pi=0.0016$

## 문 제

1. 연필의 길이를 재여 약 17cm를 얻었다. 그런데 연필의 실제길이는 16.5cm보다는 크고 17.5cm보다는 작다. 17cm라는 근사값의 절대오차한계는 얼마인가? 연필의 실제길이 L을 근사값과 절대오차한계로 표시하여라.
2. 2.78은 소수점 둘째 자리아래를 반올림하여 얻은 수이다. 절대오차한계를 구하여라. 일반적으로 어떤 수를 반올림하여 얻은 수의 절대오차한계는 어떻게 정할수 있는가?
3. 설계도면에 부속품의 길이가 $L=(250\pm0.5)\text{mm}$로 표시되였다. 이 부속품이 합격품으로 되려면 길이 $\ell$이 얼마이상, 얼마이하로 되여야 하겠는가?
4. $x$가 놓이게 되는 구간을 구하여라.

   1) $X=12.5\pm0.3$　　2) $X=10.8\pm0.4$

   3) $X=0.316\pm0.0005$　　4) $X=580000\pm500$

   5) $X=0.0098\pm0.00008$

### 3. 상대오차

**알아보기** 영숙이는 운동장의 둘레 $\ell_1$을 재고 영애는 연필의 길이 $\ell_2$를 재여 다음과 같은 값을 얻었다.

$$\ell_1 = 300 \pm 5(\mathrm{m})$$

$$\ell_2 = 18 \pm 5(\mathrm{cm})$$

1) 두 학생이 잰 값의 절대오차한계는 각각 얼마인가?
2) 절대오차한계만 알아가지고 누가 더 정확히 재였다고 말할수 있는가?
3) 두 학생이 1cm를 재는데서 생긴 절대오차한계는 각각 얼마인가?

어느 근사값이 더 정확한가를 비교하자면 절대오차 $\triangle_a$대신 $|A|$(또는 $|a|$)에 대한 $a$의 절대오차의 비

$$\frac{\Delta_a}{|A|} \text{ 또는 } \frac{\Delta_a}{|a|}$$

를 생각하여야 한다. 이 비를 상대오차라고 부르며 $\delta_a$로 표시한다.

$$\text{즉 } \delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} \quad \text{또는} \quad \delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

이 식에서 절대오차 $\triangle_a$를 절대오차한계 $\Delta a$로 바꾸면 상대오차한계 $\delta a$를 얻는다. 즉

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|A|} \text{ 또는 } \delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$$

$$\delta_a \leq \delta a$$

상대오차는 보통 %로 표시한다.

절대오차한계를 간단히 **절대오차**, 상대오차한계를 간단히 **상대오차**라고도 부른다.

**례 1** A=50, $a$=52일 때 $a$의 상대오차를 구하여라.

$$\triangle_a = |50-52| = 2$$

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} = \frac{2}{50} = 0.04 = 4(\%)$$

**례 2** $\ell = 84 \pm 0.42$의 상대오차한계와 실제값이 놓이게 될 구간을 구하여라.

$$\delta\ell = \frac{0.42}{84} \times 100\% = 0.5(\%)$$

$$84 - 0.42 \leq \ell \leq 84 + 0.42$$

$$83.58 \leq \ell \leq 84.42$$

## 문 제

1. 다음 근사값 $a$의 상대오차를 구하여라.
   1) $A=500$, $a=490$ 2) $A=17.2$, $a=17$ 3) $A=0.0425$, $a=0.04$
2. 철이는 운동장의 길이를 재여 $A=(200\pm1)$m를 얻었고 차돌이는 운동장의 너비를 재여 $B=(80\pm0.8)$m를 얻었다. 누가 더 정확히 재였는가?
3. 다음 근사값의 상대오차한계를 구하여라.
   1) $m=0.0046\pm0.0001$ 2) $d=2.08\pm0.02$
4. 다음 근사값의 절대오차한계를 구하여라.
   1) $a=260$, $\delta a=0.5\%$ 2) $a=85000$, $\delta a=2.5\%$
5. 다음것을 알고 근사값을 구하여라.
   1) $\triangle a=2.8$, $\delta a=2\%$ 2) $\triangle \ell=0.6$, $\delta \ell=1.5\%$
6. 축척이 1:50 000인 지도에서 두 점 A, B사이의 거리를 재여보니 7.3cm였다. 상대오차한계가 10%일 때 실제거리는 몇km로부터 몇km 사이에 있겠는가?

### 4. 믿을수자

1. $A=592$의 근사값으로 $a=590$을 잡았을 때 $a$에 들어있는 수자 5, 9, 0가운데서 어느 수자는 믿을만 하고 어느 수자는 믿기 어려운가?
2. $A=592$의 근사값이 $a=590$일 때 $a$의 매 수자가 놓인 자리의 단위의 절반과 절대오차를 비교하여라.

| | 5, | 9, | 0 |
|---|---|---|---|
| 단위의 절반 | $\frac{100}{2}$, | $\frac{10}{2}$, | $\frac{1}{2}$ |
| 절대오차 | 2, | 2, | 2 |

수자가 놓인 자리의 단위의 절반이 절대오차보다 작지 않은 수자는 어느것인가? 어느것을 믿을만 한 수자라고 말할수 있는가?

> 근사값에서 어떤 수자 $\alpha$가 놓인 자리의 단위의 절반이 절대오차보다 작지 않을 때 $\alpha$를 믿을수자라고 부른다.
> 1보다 작은 정수에서는 소수점아래의 0이 아닌 첫 수자앞에 있는 0은 믿을수자로 보지 않기로 한다.

**례 1** $a=7250$, $\Delta_a=7$일 때 근사값의 믿을수자를 다 써보아라.

(풀이) 근사값 $a$에서 수자 0이 놓인 자리는 하나의 자리이고 그 절반은

$\frac{1}{2}=0.5$, $0.5<7$이므로 수자 0은 믿을수자가 아니다.

이와 마찬가지로 수자 5가 놓인 자리가 열의 자리이고 $\frac{10}{2}=5$, $5<7$이므로 수자 5도 믿을수자가 아니다.

$a$의 백의 자리의 수자 2는 $\frac{100}{2}=50$, $50>7$이므로 믿을수자이다.

수자 2가 믿을수자이면 2가 놓인 자리보다 높은 자리에 있는 수자 7은 물론 믿을수자이다.

이리하여 근사값 7 250의 믿을수자는 7, 2이다.

례 2 $a=0.002035$, $\Delta a=0.000003$일 때 근사값 $a$의 믿을수자를 다 구하여라.

(풀이) 근사값 $a$에서 수자 2가 놓인 자리는 0.001의 자리이고

$$0.001\div2=0.0005>0.000003$$

이므로 2는 믿을수자이다.

이와 마찬가지로

$$0.0001\div2=0.00005>0.000003$$
$$0.00001\div2=0.000005>0.000003$$
$$0.000001\div2=0.0000005<0.000003$$

이므로 수자 0, 3은 믿을수자이고 5는 믿을수자가 아니다.

따라서 $a$의 믿을수자는 2, 0, 3뿐이다.

## 문 제

1. 근사값 $a$와 그 절대오차 $\triangle_a$가 다음과 같을 때 $a$의 믿을수자를 다 찾아라.
   1) $a=7250$, $\triangle_a=8$　　2) $a=0.00925$, $\triangle_a=0.000008$
2. $A=592$일 때 근사값 $a=600$, $a=500$의 믿을수자의 개수를 구하여라.
3. 다음 근사값의 믿을수자를 말하여라.
   1) $9.37\pm0.04$　　2) $5.397\pm0.001$
   3) $6936\pm50$　　4) $54.358\pm0.3$
   5) $0.00518\pm0.00001$　　6) $0.0180300\pm0.000003$
4. 다음 말이 옳은가?
   1) 근사값에서 수자 $\alpha$가 믿을수자이면 그보다 오른쪽에 있는 수자들은 다 믿을수자이다.
   2) 근사값에서 수자 $\alpha$가 믿을수자이면 그보다 왼쪽에 있는 수자들은 다 믿을수자이다.
   3) 근사값에서 수자 $\alpha$가 믿을수자가 아니면 그보다 왼쪽에 있는 수자들은 다 믿을수자가 아니다.

## 련 습 문 제

1. 어떤 학생의 키를 재여 153cm를 얻었다. 이 수가 1의 자리아래를 다음과 같이 얻었다고 할 때 절대오차한계와 정확한 키를 나타내는 수가 드는 구간을 구하여라.

   1) 잘라버린 경우　　2) 잘라올린 경우　　3) 반올림한 경우

2. A가 드는 구간을 구하여라.

   1) $A=27\pm2$　　2) $|A-5|\leq1.2$

   3) $A=0.0053\pm0.0007$　　4) $A=2.63\pm0.005$

3. A가 다음과 같은 구간에 들 때 A를 근사값과 절대오차한계로 표시하여라.

   1) $173\leq A\leq191$　　2) $0.642\leq A\leq0.654$

   3) $19318\leq A\leq19326$　　4) $74000\leq A\leq75000$

4. 다음 근사값의 상대오차한계를 구하여라.

   1) $A=0.64\pm0.008$　　2) $A=8600\pm40$　　3) $A=0.3\pm0.0006$

5. 다음 근사값의 절대오차를 구하여라.

   1) $a=0.675$, $\delta_a=0.5\%$　　2) $a=9.8$, $\delta_a=1.2\%$

   3) $\ell=9600$, $\delta_\ell=3\%$

6. 다음것을 알고 근사값을 구하여라.

   1) $\Delta a=3$, $\delta a=2\%$　　2) $\Delta\ell=72$, $\delta\ell=0.6\%$

   3) $\Delta m=108$, $\delta m=6\%$　　4) $\Delta p=0.0008$, $\delta p=2.2\%$

7. 다음 측정에서 어느것이 더 정확히 측정되였는가를 밝혀라.

   $d=(0.25\pm0.01)\text{mm}$,　　$\ell=(380000\pm500)\text{km}$

8. 다음 근사값의 마지막믿을수자의 아래를 반올림하여라. 이때 상대오차한계를 구하여라.

   1) $23496\pm100$　　2) $0.0349\pm0.0001$

9. $a=22.8$, $22.56\leq A\leq23.05$일 때 $a$의 믿을수자를 말하여라.

## 제2절. 근사값의 계산

**해보기** 근사값들을 보통 믿을수자들만 가지고 쓴다.

1. 다음 근사값들의 절대오차한계를 구하여라.

   32.50,　　0.019 4,　　2 306,　　0.240 0

2. 두 근사값 $a=17.2$, $b=3.4167$의 합을 다음과 같이 두가지 방법으로 구하고 그 값들을 비교하여보아라.

1) $\begin{array}{r} 17.2??? \\ +\ \ 3.4167 \\ \hline 20.6??? \end{array}$

2) $\begin{array}{r} 17.2 \\ +\ \ 3.4 \\ \hline 20.6 \end{array}$

오차를 정확히 고려하지 않을 때 근사값들의 계산은 다음과 같이 한다.

**근사값의 계산규칙(1)**

두개의 근사값들의 합이나 차를 계산할 때에는 보통 주어진 근사값들가운데서 마지막믿을수자의 자리가 가장 높은것을 찾고 다른 근사값들은 반올림하여 이보다 한자리 더 남겨서 계산한다. 나온 계산결과에서는 마지막자리를 반올림한다.

례 1 근사값들로 된 다음 식을 계산하여라.

1) $84.072+5.6\approx 89.7$

$\begin{array}{r} 84.07 \\ +\ \ \ \ 5.6 \\ \hline 89.67 \end{array}$

2) $165.846-92.4\approx 73.5$

$\begin{array}{r} 165.85 \\ -\ \ \ 92.4 \\ \hline 73.45 \end{array}$

3) $27.03+3.484+15.6728\approx 46.18$

$\begin{array}{r} 27.03 \\ +\ \ 3.484 \\ \hline 30.514 \end{array} \approx \begin{array}{r} 30.51 \\ +\ 15.673 \\ \hline 46.183 \end{array}$

## 문 제

1. 근사값들로 된 다음 식을 계산하여라.

   1) $4.354+0.4872+4.7$　　2) $6.98+1.49735-0.7$

   3) $1.369+732.1+0.46935-1.728-136.4$

2. $a=24.4076$, $b=5.43$, $c=13.6$일 때 다음 식의 값을 구하여라.

   1) $a+b$　　2) $a-c$　　3) $a+b+c$　　4) $a-b-c$

### 근사값의 계산규칙 (2)

두개의 근사값들의 적이나 상을 계산할 때에는 보통 주어진 수들가운데서 믿을수자의 개수가 가장 작은것을 찾고 다른것은 반올림하여 이보다 한자리 더 남겨가지고 계산한 다음 결과의 믿을수자의 개수는 처음 찾은것과 같게 한다.

**례 2** 근사값 $0.45326\times3.7$을 계산하여라.

```
  0.453
×    3.7
 -------
   3171
 1 359
 -------
 1.6761
```

답. 1.7

(주의) 수를 10의 제곱을 써서 지수형식으로 쓸 때에는 결수에 믿을수자만을 다 쓰기로 한다.

**례 3** $(3.6\times10^5)\times(5.6082\times10^3)$을 계산하여라.

```
      3.6
×    5.61
 --------
       36
     216
    180
 --------
   20.196
```

답. $20\times10^8$

### 문 제

근사값들로 된 다음 식을 계산하여라.(1－4)

1. 1) $0.00275\times6.4$ 　　2) $12.768\div0.25$
2. 1) $(1.4+3.9257)\times0.003854$
   2) $(0.0632-2.5)\div8.5$ 　　3) $(148.36+21)\div1.6842$
3. 1) $16.93\div2.2-5.18\div3.1$
   2) $9.6(1.34816+3.5)+7.36(2.9-0.73528)$
   3) $1.8(0.6+21.3842)+91.8(5.3+9.0368)$
4. 1) $(9.31083\times10^4)\times(46.8\times10^3)$ 　　2) $(5.48006\times10^{12})\times0.0035$

## 련 습 문 제

1. 근사값들로 된 다음의 식을 계산하여라.

   1) 35.89+9.785+12.7　　　　2) 6.958−0.46+0.3051
   3) 12.034+0.6478−5.03　　　4) 7.301−5.42+0.41

2. A=20.07423, B=12.65, C=0.71일 때 다음 식의 값을 구하여라.

   1) A+B　　　2) A+B−C　　　3) A−B+C
   4) AC　　　5) B÷C　　　6) $\frac{AB}{C}$

3. 어떤 건설장구역이 제형모양이다. 아래밑변이 86m, 웃밑변이 83.6m, 높이가 245.8m일 때 이 건설장구역의 면적을 구하여라.
4. 반경이 8.3cm인 원의 둘레의 길이와 면적을 구하여라.
5. 금 1.5t은 몇$m^3$이겠는가? 금의 밀도는 $19.6\times10^3$kg/$m^3$이다.
6. 질량이 2.03kg인 금으로 만든 구를 물이 가득찬 그릇에 담으면 얼마만 한 체적의 물이 흘러나가겠는가?
7. 지구의 평균밀도는 $5.5\times10^3$kg/$m^3$이고 지구의 반경은 약 $64\times10^2$km이다. 지구의 질량은 몇t인가?

## 제3절. 수의 표준지수형식

### 1. 지수가 부수인 제곱

**알아보기** 다음의 표를 보면서 물음에 대답하여라.

| $10^n$ | | | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 계산한 값 | | | 10 000 | 1 000 | 100 | 10 | | | |

1) 웃줄에서 왼쪽으로 가면서 10의 지수는 어떻게 변하는가? 이때 아래줄에서 그 값은 어떻게 변하는가?

2) 웃줄에서 오른쪽으로 가면서 10의 지수는 어떻게 변하는가? 이때 아래줄에서 그 값은 어떻게 변하는가?

3) 여기서 찾은 규칙에 의하여 빈 칸에 알맞는 수를 써넣어라.

4) $10^0$, $10^{-1}$, $10^{-2}$, …의 값은 얼마로 보아야 하겠는가?

지수가 0 또는 부의 옹근수인 10의 제곱은 다음과 같이 약속한다.

$$10^0=1$$

$$10^{-n}=\frac{1}{10^n}\ (n\in N)$$

그러므로 $10^{-n}=\dfrac{1}{1\underbrace{000\cdots0}_{n}}=0.\underbrace{000\cdots01}_{n}$

문 제

1. 다음 수를 분자가 1인 분수모양으로 표시하여라.

 1) $10^{-2}$ 2) $10^{-7}$ 3) $10^{-18}$

2. 다음 수들을 소수모양으로 표시하여라.

 1) $10^{-3}$ 2) $10^{-5}$ 3) $\dfrac{1}{10000}$ 4) $\dfrac{1}{1000000}$

3. 다음 수들을 10의 제곱모양으로 표시하여라.

 1) 0.000 01 2) $\dfrac{1}{100000}$ 3) 1 000 000

4. 다음 수들을 지수형식으로 표시하여라.

 1) 7 000 2) 0.000 09

 3) 0.005 4 4) $\dfrac{1}{4}$ 5) $\dfrac{1}{320}$

알아보기 다음 계산과정을 보고 무엇을 알수 있는가?

$$10^5\times10^{-3}=\frac{100000}{1000}=10^2=10^{5+(-3)}$$

$$10^{-2}\times10^{-3}=\frac{1}{100}\times\frac{1}{1000}=\frac{1}{100000}=10^{-5}=10^{-2+(-3)}$$

$$10^5\div10^2=\frac{100000}{100}=10^3=10^{5-2}$$

$$10^{-3}\div10^{-2}=\frac{1}{1000}\div\frac{1}{100}=\frac{1}{10}=10^{-1}=10^{-3-(-2)}$$

## 문 제

다음 식을 계산하여라.

1) $10^7 \times 10^{-4}$
2) $10^{-5} \times 10^{-2}$
3) $10^{-4} \times 10^2$
4) $10^8 \div 10^3$
5) $10^{-2} \div 10^{-5}$
6) $10 \div 10^2$
7) $10^5 \times 10^{-3} \times 10^{-7}$
8) $10^4 \div 10^{-1} \div 10^{-1}$

## 2. 유효수자

 0.002 304에 10, 100, 1 000, …, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, …을 곱하여 보아라. 이때 달라지지 않는 수자렬의 토막을 찾아보아라.

10진수의 수자렬에서 10의 제곱을 곱하거나 10의 제곱으로 나누어도 달라지지 않는 토막에 들어있는 모든 수자들을 그 수의 유효수자라고 부른다.

 3 260의 유효수자는 3, 2, 6
0.003 060 7의 유효수자는 3, 0, 6, 0, 7
4.024의 유효수자는 4, 0, 2, 4

## 문 제

1. 다음 수의 유효수자를 불러보아라.
   1) 2 500
   2) 0.060 60
   3) 1 990.415
   4) 5.010 020 00
2. 다음 ☐안에 알맞는 말을 써넣어라.
   10진법으로 씌여진 어떤 10진수렬의 유효수자의 토막은 그 수의 제일 왼쪽에 있는 ☐수자에서 시작하여 제일 오른쪽에 있는 ☐수자에서 끝난다.

## 3. 수의 표준지수형식

1. 다음 수들의 소수점을 첫 유효수자 바로 뒤로 옮기려면 그 수를 몇배하면 되는가?

   1) 53.686　　2) 784.3　　3) 62.4

   4) 0.64　　5) 0.037 5　　6) 0.000 78

2. 우의 수들을 1과 10사이에 있는 수를 써서 표시하려면 소수점을 어디에 옮겨찍어야 하는가?

모든 정수들은 1과 10사이에 있는 수와 10의 제곱의 적(지수형식)으로 표시할수 있다.

$36200=3.62\times10^4$　　$39.86=3.986\times10$　　$0.0037=3.7\times10^{-3}$

**수의 표준지수형식**

정수를 구간 [1, 10)에 드는 수에 10의 제곱을 곱한 적으로 표시한것을 수의 표준지수형식이라고 부른다.

$A=a\cdot10^n$　　$(1\le a<10,\ n\in Z)$

($a$: 표준결수, $n$: 표준지수)

수의 표준지수형식에서 표준결수를 모두 믿을수자들로 쓴다.

### 문 제

1. 다음 수들가운데서 표준지수형식으로 표시된것을 찾아보아라.

   1) $0.9432\cdot10^{-3}$　　2) $5.429\cdot10^4$　　3) $10\cdot10^{-4}$　　4) $4\cdot10^{-8}$

   5) $1.2\cdot5^3$　　6) $1\cdot10^{25}$　　7) $9\cdot10^0$

2. 다음 수들을 표준지수형식으로 표시하여라. 소수점이 옮겨간 자리수와 표준지수사이에 어떤 관계가 있는가를 생각하여보아라.

   1) 7 230　　2) 0.000 62　　3) 6 236 000　　4) 0.000 000 92

**표준지수형식으로 고치는 방법**

표준결수는 첫 유효수자 바로 뒤에 소수점을 찍어서 얻는다.

표준지수는 표준결수가 소수점을 왼쪽으로 $n$자리 옮겨 얻어졌다면 $n$이고 오른쪽으로 $n$자리 옮겨 얻어졌다면 $-n$이다.

례 2 1) $25800 = 2.58 \times 10^4$

4자리

2) $0.000037 = 3.7 \times 10^{-5}$

5자리

3) $1000000 = 1 \times 10^6$

6자리

## 문 제

1. 다음 수들을 표준지수형식으로 고쳐라.

1) 0.004 79 　 2) 3 650 000 　 3) 49.43

4) 111.111 　 5) 0.42 　 6) 1 990.216

7) 10 000 000 000 　 8) $42.3 \times 10^9$ 　 9) $519 \times 10^{23}$

2. 다음 수들을 $a \cdot 10^n (1 \leq a < 100,\ n$은 짝수)모양의 지수형식으로 표시하여라.

1) $350000 = 35 \times 10^4$ 　 2) 35 000

3) 725 831 　 4) 0.000 641 9

3. 다음 수들을 $a \cdot 10^n (1 \leq a < 1000,\ n$은 3의 배수)모양의 지수형식으로 표시하여라.

1) $316700000 = 316.7 \times 10^6$ 　 2) 20 500

3) 0.000 9 　 4) 0.000 000 040 582

5) 9 　 6) $0.529 \times 10^{-7}$

## 련 습 문 제

1. 다음 수들을 지수가 부수인 제곱으로 표시하여라.

1) $\dfrac{1}{10^3}$ 　 2) $\dfrac{1}{1000000}$

3) 0.000 000 01 　 4) 0.000 5 　 5) $\dfrac{1}{2 \cdot 10^4}$

2. 다음 수들을 표준지수형식으로 표시하여라.

1) 0.002 34 　 2) 1.009 46

3) 8 　 4) 13

5) 0.9 　 6) 123 400

7) 0.050 000 9 　 8) $1391 \times 10^6$

9) $53.85 \times 10^{-5}$ 　 10) $0.00019 \times 10^{-3}$

3. 다음 식에 들어있는 수들을 표준지수형식으로 고친 다음 식을 계산하여라.

1) $3000\times40000$　　2) $80000\times0.000125$

3) $0.00008\div2000$　　4) $\frac{24000}{50}$

5) $\frac{36000}{0.004}$　　6) $0.0035\times720000\div0.004$

4. 다음 글에서 수들을 표준지수형식으로 표시하여라.

1) 진공속에서 빛의 속도는 약 299 800 000m/s이다.

2) 전자의 질량은 $m_e=0.0091\times10^{-34}$kg이다.

3) 총알의 속도는 $v=800$m/s이다.

5. 지구에서 달까지 거리는 $3.8\times10^5$km이다. 빛의 속도를 대략 $3.0\times10^5$km/s로 보고 지구에서 보낸 빛이 달까지 갔다오는데 걸리는 시간을 계산하여라.

## 복 습 문 제

1. 다음 수들을 반올림하여 나오는 근사값과 그 절대오차 및 상대오차를 구하여라.

1) 37.541(0.1의 자리아래)　　2) 53 419.6(1 000의 자리아래)

3) 2 568.43(100의 자리아래)　　4) 0.000 009 426(소수점 7자리아래)

2. 다음 근사값의 믿을수자들을 말하여라.

1) $2.94\pm0.1$　　2) $0.4392\pm0.0005$

3) $0.4930\pm0.0002$　　4) $5234\pm9$　　5) $2.16500\pm0.00004$

3. 다음 근사값에서 절대오차한계를 구하여라.

1) $9.4\times10^2$　　2) $5.723\times10$　　3) $0.265\times10^4$

4) $2.3190\times10^5$　　5) $3.05\times10^{-2}$

6) $8.532\times10^{-3}$　　7) $19\times10^{12}$

4. 세 학생이 어떤 서로 다른 길이들을 재여 다음과 같은 값들을 얻었다.

$$\ell_1=(28\pm1)\text{m},\quad \ell_2=(64\pm2)\text{m},\quad \ell_3=(125\pm3)\text{m}$$

1) 어느것의 절대오차한계가 가장 작은가?

2) 어느 근사값을 가장 정확히 재였다고 볼수 있는가?

5. 근사값 $a$, 절대오차한계 $\triangle a$, 상대오차한계 $\delta_a$가운데서 두개를 알고 나머지 한개의 값을 구하는 식을 써라. 또 정확한 값 A를 근사값과 절대오차한계로 표시하여라.

6. 근사값의 계산규칙에 의하여 다음 식을 계산하여라.

$$\frac{7.165\times3.4+5.9\times8.43216}{9.7\times0.8884-3.5\times0.971}$$

7. 어떤 대형굴착기가 땅에 주는 압력이 9590×10Pa이다. 무한궤도가 땅에 닿는 면적이 9.4$m^2$라면 굴착기의 질량은 얼마인가?

8. 다음 근사값들을 믿을수자만 남기고 표준지수형식으로 써라.

1) $a$=4376±7　　2) $a$=0.00563±0.00005

3) $a$=23.84±0.004　　4) $a$=0.9800±0.00008

9. 다음 글에 있는 수들을 표준지수형식으로 표시하여라.

1) 지구에서 태양까지의 거리는 약 150 000 000km이다.

2) 1$\mu$m(미크론)는 0.000 001m이다.

3) 전자의 전기량은 1600×$10^{-22}$C(꿀롱)이다.

# 제6장. $\frac{1}{2}$ 제곱과 삼각비

$$(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

## 제1절. $\frac{1}{2}$ 제곱

### 1. $\frac{1}{2}$ 제곱

**해보기** 바른4각형의 한 변의 길이가 $x$일 때 그 면적은 $x^2$이다.

1) 바른4각형의 면적이 4라고 하면 변의 길이는 얼마인가?
2) $x^2=4$에 맞는 $x$의 정수값을 $4^m$으로 표시하면 $m$은 어떤 수로 되여야 하겠는가?
3) 바른4각형의 면적이 $a$일 때 변의 길이 $x$를 제곱모양으로 표시하여보아라.

> $a \geq 0$일 때 2제곱이 $a$인 부 아닌 수를
>
> $a^{\frac{1}{2}}$ (밑수: $a$, 지수: $\frac{1}{2}$)
>
> 으로 표시하고 《$a$의 $\frac{1}{2}$ 제곱》이라고 읽는다.
>
> $(a^{\frac{1}{2}})^2=a, \quad a^{\frac{1}{2}} \geq 0$

**례 1** $4^2=16$이므로 $16^{\frac{1}{2}}=4$

$8^2=64$이므로 $64^{\frac{1}{2}}=8$

$10^2=100$이므로 $100^{\frac{1}{2}}=10$

$0^2=0$이므로 $0^{\frac{1}{2}}=0$

$\frac{1}{2}$ 제곱에서는 밑수가 반드시 부 아닌 수여야 한다.

$a^{\frac{1}{2}}$ 을 $\sqrt{a}$ 와 같이 쓰고 《루트 $a$》라고 읽는다.
그리고 $\sqrt{\ }$를 루트(뿌리기호)라고 읽는다.

**례 2** $16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4, \qquad -16^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{16}=-4$

$64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=8, \qquad 100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$

문 제

1. 다음 같기식이 옳은가를 따져보아라.

1) $169^{\frac{1}{2}}=13$　　2) $3600^{\frac{1}{2}}=60$　　3) $0.09^{\frac{1}{2}}=0.3$

2. 다음 식들가운데서 값을 가지지 않는것은 (　)이다.

1) $\sqrt{0.01}$　　2) $(-4)^{\frac{1}{2}}$　　3) $\sqrt{(-7)^2}$

4) $\sqrt{(-3)^3}$　　5) $-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$　　6) $\sqrt{11}-\sqrt{-1}$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $(-\sqrt{21})^2$　　2) $(\sqrt{0.23})^2$　　3) $\left(\sqrt{\frac{7}{6}}\right)^2$　　4) $(\sqrt{(-1.9)^2})^2$

## 2. 2차뿌리

**알아보기** 방정식 $x^2=1$의 풀이는 몇개인가? $x^2=25$는?

> $a\geq 0$ 일 때 방정식 $x^2=a$ 의 풀이를 $a$ 의 2 차뿌리라고 부른다.
>
> $a$가 정수이면 $a$의 2차뿌리는 $a^{\frac{1}{2}}$ 과 $-a^{\frac{1}{2}}$ 의 두개로서 서로 반대수이다. 0 의 2차뿌리는 0뿐이다.

**례 1** 1) 방정식 $x^2=9$의 풀이 즉 9의 2차뿌리는

$$9^{\frac{1}{2}}=3, \qquad -9^{\frac{1}{2}}=-3$$

2) 0.25의 2차뿌리는 $0.25=(\pm 0.5)^2$이므로

$$0.25^{\frac{1}{2}}=0.5, \qquad -0.25^{\frac{1}{2}}=-0.5$$

**례 2** 다음 식에서 $x$를 구하여라.

$$(x-2)^2=9$$

(풀이)　$x-2=\pm 3$

$x-2=3$으로부터 $x=5$

$x-2=-3$으로부터 $x=-1$

## 문 제

1. 다음 말이 옳은가?
   1) $-4$와 $4$는 $16$의 2차뿌리이다.
   2) $-\frac{2}{5}$와 $\frac{2}{5}$는 $-\frac{4}{25}$의 2차뿌리이다.
   3) $-0.15$와 $0.15$는 $0.0225$의 2차뿌리이다.
2. 다음 수들의 2차뿌리를 구하여라.

$$49, \quad \frac{4}{9}, \quad 0.01, \quad 1$$

3. 다음 말이 옳은가?
   1) 64의 2차뿌리는 $\sqrt{64}$ 뿐이다.
   2) 64의 2차뿌리는 $\pm\sqrt{64}$ 뿐이다.
   3) $\sqrt{64}=\pm 8$
4. 다음 식에서 $x$를 구하여라.
   1) $x^2=144$ 　 2) $x^2=255$ 　 3) $y^2-7=0$ 　 4) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4$
   5) $25y^2-16=0$ 　 6) $(x+\sqrt{3})^2=5$ 　 7) $(x+3)^2-36=0$

### 3. 실 수

분수로 표시되는 수를 유리수라고 불렀다.

수가운데는 유리수가 아닌 수도 있다. 수 $2^{\frac{1}{2}}$도 유리수가 아니라는것을 증명할수 있다.

$2^{\frac{1}{2}}$이 유리수 $\frac{b}{a}$라고 하자. 즉 $2^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{a}$

이제 $a$와 $b$가 소라고 하자.

량변을 2제곱하면

$$2=\frac{b^2}{a^2}, \quad 2a^2=b^2$$

그러면 $b^2$이 2로 완제되므로 $b$는 2로 완제된다.

결국 $a$가 2로 완제되여 $a$, $b$가 서로 소라는데 모순된다.

따라서 $2^{\frac{1}{2}}$은 유리수가 아니다. $2^{\frac{1}{2}}$을 구체적으로 구해보면

$$2^{\frac{1}{2}}=1.414213\cdots$$

이것은 분수로 표시할수 없는 비순환무한소수이다.

**비순환무한소수로 표시될수 있는 수를 무리수라고 부른다.**

**례** $3^{\frac{1}{2}}$, $-2^{\frac{1}{2}}$ 등은 무리수이다.

그러나 $4^{\frac{1}{2}}$, $-9^{\frac{1}{2}}$과 같은 수는 유리수이다.

$\frac{1}{2}$제곱모양이 아닌 무리수도 있다.

원둘레률 $\pi=3.14159\cdots$도 무리수이다.

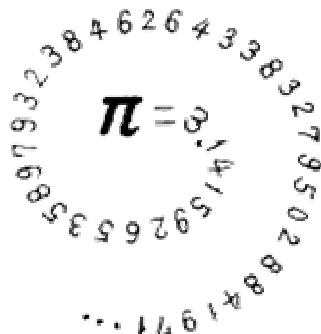



그림 6-1

## 문 제

1. 다음의 수들이 무리수라는것을 증명하여라.

$$5^{\frac{1}{2}},\quad 10^{\frac{1}{2}},\quad 7^{\frac{1}{2}}$$

2. 다음의 수들가운데서 유리수를 골라내여라. 또 무리수를 골라내여라.

$$3,\ \frac{1}{9},\ -10^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{100},\ 3\frac{1}{2},\ 8^{\frac{1}{2}},\ 0.75,\ -2.0(3),\ 1.010\,010\,001\cdots$$

**알아보기**

1. 모든 유리수를 수축의 점으로 표시할수 있었다. 그런데 수축의 모든 점을 다 유리수로 표시할수 있겠는가?
2. 그림 6−2에서 선분 DO와 BD의 길이를 $a$로 표시할수 있겠는가?

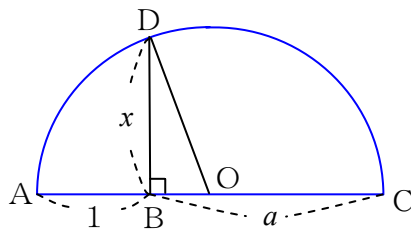



그림 6-2

유리수와 마찬가지로 무리수도 다 수축의 점으로 표시할수 있다.

$a^{\frac{1}{2}}$ 모양의 수들을 수축에 표시하는 방법을 생각하여보자.

그림에서 △DBO는 직3각형이다.

그러므로 피다고라스공식에 의하여

$$BD^2=DO^2-BO^2 \qquad (1)$$

그런데 $BD=x$

$$DO=\frac{a+1}{2}\ (\text{반경})$$

$$BO=\frac{a+1}{2}-1=\frac{a-1}{2}$$

이것들을 식 (1)에 갈아넣으면

$$x^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

정돈하면

$$x^2=a$$

즉 $x=\pm a^{\frac{1}{2}}$

이로부터 그림 6-3에서와 같이 수축에 자리표가 $a^{\frac{1}{2}}$인 점을 찍을수 있다.

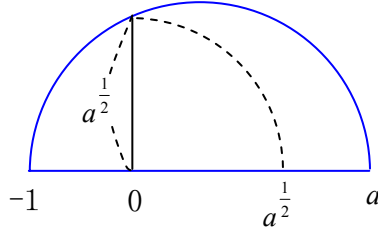



그림 6-3

무리수도 유리수와 같이 끝없이 많으며 정의 무리수, 부의 무리수로 가른다.

P가 정의 무리수일 때 그의 반대수인 −P는 수축에서 P를 표시하는 점과 원점에 관하여 대칭인 점으로 표시된다.

**알아보기**

1. 임의의 두 유리수 $a$, $b(a<b)$에 대하여 $a<c<b$인 유리수 $c$가 있겠는가?
2. 임의의 두 무리수 $p$, $q(p<q)$에 대하여 $p<r<q$인 무리수 $r$가 있겠는가?

> 유리수와 무리수를 통털어 실수라고 부른다. 수축의 점은 어느것이나 다 실수를 표시한다. 실수 $a$를 표시하는 점을 간단히 《점 $a$》라고 읽는다.

두 실수 $a$, $b$에 대하여 $a\pm b$, $ab$, $\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$도 실수이며 $a\geq 0$일 때 $a^{\frac{1}{2}}$도 실수이다. 실수전체의 모임을 R, 유리수모임을 Q, 무리수모임을 P로 표시하면

$$R=P\cup Q,\quad P=\overline{Q},\quad P,\ Q\subset R$$

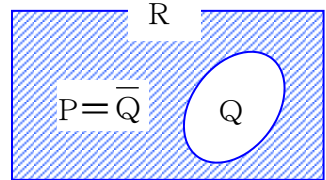
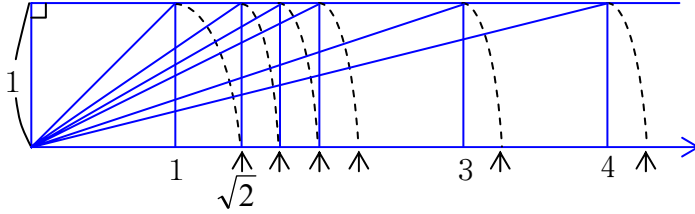



그림 6-4

## 문제

1. 수축에 자리표가 $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{2}}$인 점을 찍어보아라.
2. 수축에 점 $5^{\frac{1}{2}}$, $-5^{\frac{1}{2}}$을 표시하여라.
3. 그림에서 화살이 가리키는 점들은 어떤 수를 표시하는가?

그림 6-5

**상 식**

### 무리수의 발견과 피다고라스학파

피다고라스학파에서는 세상만물이 오직 《유리수》 즉 $\frac{m}{n}$ 모양의 수로만 되여있다고 주장하여왔다. 그런데 히빠소스라는 피다고라스의 한 제자는 자기 학파의 상징인 펜타그람마(바른5각형)에서 《유리수》가 아닌 《괴상한》 수를 발견하였다. 그것은 펜타그람마의 한 대각선의 길이였다. 《괴상한》수는 펜타그람마뿐만아니라 바른4각형과 바른3각형에서도 발견되였다.

피다고라스에게는 《유리수》가 아닌 새로운 수, 무리수가 있다는것이 골치거리로, 《무서운》 일로 되였다.

그리하여 무리수의 발견자 히빠소스를 바다에 빠뜨려 죽일것을 제자들에게 명령하였다.

이 일이 있은 후 가혹한 피다고라스의 《법률》에 대한 제자들의 반감이 커져서 피다고라스학파는 멸망하고말았다.

**련 습 문 제**

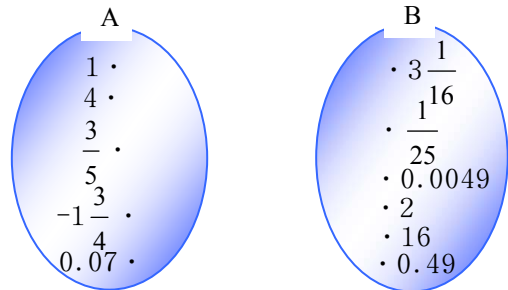
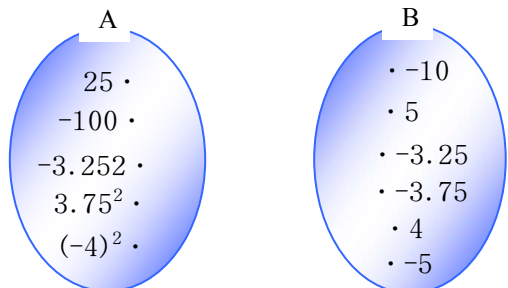
1. 모임 A의 수에 B의 수가운데서 그 2제곱인 수를 대응시키는 대응을 화살로 표시하여라.

2. 모임 A의 수에 B의 수가운데서 부 아닌 2차뿌리를 대응시키는 대응을 화살로 표시하여라.
또한 부인 2차뿌리를 대응시키는 대응을 화살로 표시하여라.

3. 다음 식들가운데서 뜻을 가지는것과 가지지 않는것을 갈라내여라.

그림 6-6



그림 6-7

$$0.01^{\frac{1}{2}},\quad (-0.01)^{\frac{1}{2}},\quad (7^2)^{\frac{1}{2}},\quad (-7^2)^{\frac{1}{2}},\quad [(-7)^2]^{\frac{1}{2}}$$

4. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $(\sqrt{16})^2$　　2) $(-\sqrt{3})^2$　　3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2$

5. 다음 □에 알맞는 관계기호(=, >, < 가운데서)를 써라.

1) $\sqrt{5}\,\square\,\sqrt{5.3}$　　2) $\dfrac{3}{25}\,\square\,\sqrt{0.12}$　　3) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}\,\square\,\sqrt{0.37}$

4) $-\sqrt{3}\,\square\,-\sqrt{3.5}$　　5) $-\sqrt{3}\,\square\,\sqrt{(-3)^2}$

6. 다음것이 옳은가를 따져보아라.

1) 9의 2차뿌리는 $\sqrt{9}$ 뿐이다.　　2) 9의 2차뿌리는 $\pm\sqrt{9}$

3) $(\sqrt{3})^2=3$이므로 $(\sqrt{-3})^2=-3$　　4) $\sqrt{-8^2}=|-8|=8$

5) $\sqrt{(-8)^2}=\sqrt{64}=8$

7. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2=25$　　2) $x^2-\dfrac{1}{9}=0$　　3) $y^2-\dfrac{25}{64}=0$　　4) $(x+1)^2=2$

8. 다음 같기식이 옳은가?

1) $\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{5^2}+\sqrt{4^2}$　　2) $\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{5^2}-\sqrt{4^2}$

3) $\sqrt{(-2)(-8)}=\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8}$　　4) $\sqrt{\dfrac{-9}{-25}}=\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-25}}$

9. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 와 같은 수가 무리수라고 하여 자연수의 2차뿌리가 다 무리수라고 말할수 있는가?

10. 한 변의 길이가 1, 빗변의 길이가 다음과 같은 직3각형을 1cm를 단위로 하여 그려라.

1) $\sqrt{17}$　　2) $\sqrt{15}$　　3) $\sqrt{29}$　　4) $\sqrt{21}$　　5) $\sqrt{11}$

## 제2절. $\frac{1}{2}$ 제곱의 계산

### 1. $\frac{1}{2}$ 제곱의 성질

어떤 수 B가 $A^{\frac{1}{2}}$ 이라는것을 말하자면 $\dfrac{1}{2}$ 제곱의 정의로부터 다음 두가지를 따져보면 된다.

1) $B^2=A$ 2) $B\geq 0$

**해보기** 다음 두 식의 값을 비교하여라.

1) $(4\cdot 9)^{\frac{1}{2}}$ 과 $4^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{2}}$

2) $(25\cdot 100)^{\frac{1}{2}}$ 과 $25^{\frac{1}{2}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$

성질 1. (적의 $\frac{1}{2}$ 제곱) $a\geq 0$, $b\geq 0$ 일 때

$$(ab)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$$

3개이상의 부 아닌 수 $a$, $b$, $\cdots$, $h$에 대해서도 이 성질이 성립한다. 즉

$$(ab\cdots h)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\cdots h^{\frac{1}{2}}$$

**례 1** 1) $(4\cdot 36)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}\cdot 36^{\frac{1}{2}}=2\cdot 6=12$

2) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}=(3\cdot 27)^{\frac{1}{2}}=81^{\frac{1}{2}}=9$

**례 2** $7056^{\frac{1}{2}}$을 계산하여라.

(풀이) 7 056을 씨인수분해하면

$$7056=2^4\cdot 3^2\cdot 7^2$$

따라서 $7056^{\frac{1}{2}}=(2^4\cdot 3^2\cdot 7^2)^{\frac{1}{2}}=$

$$=(2^4)^{\frac{1}{2}}\cdot(3^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(7^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2^2\cdot 3\cdot 7=84$$

$a\geq 0$일 때

$$(a^{2m})^{\frac{1}{2}}=(\underbrace{a^2\cdot a^2\cdots\cdots a^2}_{m\text{개}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(a^2)^{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(a^2)^{\frac{1}{2}}=a^m$$

그러므로

$$(a^{2m})^{\frac{1}{2}}=a^m$$

**례 3** $(4x^6)^{\frac{1}{2}}=(2^2\cdot x^{2\cdot3})^{\frac{1}{2}}$

$=2x^3 \ (x\geq 0)$

## 문 제

1. 적의 $\frac{1}{2}$제곱에 관한 성질을 말로 표현해보아라.
2. 다음 식의 값을 구하여라.

   1) $(9\cdot64)^{\frac{1}{2}}$　　2) $(1.44\cdot0.81)^{\frac{1}{2}}$　　3) $(16\cdot9\cdot64)^{\frac{1}{2}}$　　4) $(64\cdot16\cdot25)^{\frac{1}{2}}$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

   1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$　　2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$　　3) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$

   4) $\sqrt{324}$　　5) $\sqrt{3136}$　　6) $\sqrt{5184}$

**해보기** 다음 두 식의 값을 계산하고 그 값을 비교하여라.

1) $\left(\frac{81}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$과 $\frac{81^{\frac{1}{2}}}{100^{\frac{1}{2}}}$　　2) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$과 $\frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}$

**례 4** 1) $\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{16^{\frac{1}{2}}}{49^{\frac{1}{2}}}=\frac{4}{7}$　　2) $\frac{294^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{294}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=49^{\frac{1}{2}}=7$

문 제

1. 상의 $\frac{1}{2}$ 제곱에 관한 성질을 말로 표현해보아라.

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\left(\frac{100}{144}\right)^{\frac{1}{2}}$　　2) $\left(\frac{196}{256}\right)^{\frac{1}{2}}$　　3) $\sqrt{\frac{49}{25\cdot36}}$

4) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$　　5) $\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{360}}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{5}}$　　6) $\frac{\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5^2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2}}$

3. 다음 같기식이 성립하는가를 따져보아라.

$$(a\cdot10^{2m})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot10^{m}\ (a>0,\ m\text{은 옹근수})$$

## 2. $\frac{1}{2}$ 제곱의 계산

주어진 수를 오른쪽으로부터 두개의 수자씩 토막으로 끊어갈 때 그 토막의 수가 구하려는 $\frac{1}{2}$ 제곱수의 자리수와 같다.

례 1　1) $(21\dot{:}62\dot{:}38)^{\frac{1}{2}}$ 은 세자리수이다.

2) $\sqrt{5\dot{:}60\dot{:}37\dot{:}62}$ 는 네자리수이다.

해보기　다음 계산과정을 보고 $\frac{1}{2}$ 제곱을 어떻게 계산할수 있는가를 설명해보아라.

$$30<1156^{\frac{1}{2}}<40$$

따라서　$1156=(30+k)^2$

$1156=900+2\cdot30k+k^2$

$1156-900=2\cdot30k+k^2$

$256=(2\cdot30+k)k$

```
 30                    30
 30       k            30       4
--------------        ------------
 60+k | 256            60+4 | 256
                          4 | 256
                      ------------
                                0
```

| | 3 | 4 |
|---|---|---|
| 3 | 11 | 56 |
| 3 | 9 | |
| 64 | 2 | 56 |
| 4 | 2 | 56 |
| | 0 | |

**례 2** 다음것을 구하여라.

1) $405769^{\frac{1}{2}}$　　　　2) $\sqrt{5}$

(풀이)

1)

| | 6 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|
| 6 | 40 | 57 | 69 |
| 6 | 36 | | |
| 123 | 4 | 57 | |
| 3 | 3 | 69 | |
| 1267 | | 88 | 69 |
| 7 | | 88 | 69 |
| | | 0 | |

$405769^{\frac{1}{2}}=637$

2)

| | 2. | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 00 | 00 | 00 |
| 2 | 4 | | | |
| 42 | 1 | 00 | | |
| 2 | | 84 | | |
| 443 | | 16 | 00 | |
| 3 | | 13 | 29 | |
| 4466 | | 2 | 71 | 00 |
| 6 | | 2 | 67 | 96 |
| 4472 | | | 3 | 04 |
| … | | | | … |

$\sqrt{5}=2.236$

(주의) 수의 $\frac{1}{2}$제곱을 구하는 경우에 소수부는 소수점부터 오른쪽으로 가면서 두 자리씩 구분해야 한다.

**례 3** $\sqrt{316.4841}$을 구하여라.

(풀이)

| | 1 | 7. | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 16. | 48 | 41 |
| 1 | 1 | | | |
| 27 | 2 | 16 | | |
| 7 | 1 | 89 | | |
| 347 | | 27 | 48 | |
| 7 | | 24 | 29 | |
| 3549 | | 3 | 19 | 41 |
| 9 | | 3 | 19 | 41 |
| | | | | 0 |

$\sqrt{316.4841}=17.79$

례 4 $\sqrt{316.7}$ 을 전자수산기로 구하여라.

(풀이) 316.7 [ $\sqrt{\ }$ ] ⟶ 17.796≈17.80

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $1369^{\frac{1}{2}}$ 2) $\sqrt{7921}$ 3) $\sqrt{0.2116}$ 4) $56.7009^{\frac{1}{2}}$

2. 다음것을 소수점아래 셋째 자리까지 구하여라.

1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{8}$

## 련 습 문 제

다음 식의 값을 구하여라.(1—3)

1. 1) $(0.81\times 49)^{\frac{1}{2}}$ 2) $(0.49\times 36\times 0.01)^{\frac{1}{2}}$ 3) $2^{\frac{1}{2}}\cdot 128^{\frac{1}{2}}$

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ 5) $13^{\frac{1}{2}}\cdot 52^{\frac{1}{2}}$ 6) $\left(\frac{36\times 15}{49\times 25}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. 1) $(9^3)^{\frac{1}{2}}$ 2) $(4\cdot 3^4)^{\frac{1}{2}}$ 3) $(25^3)^{\frac{1}{2}}$

3. 1) $10000^{\frac{1}{2}}$ 2) $0.36^{\frac{1}{2}}$ 3) $3\cdot 16^{\frac{1}{2}}$

4) $0.1\cdot 900^2$ 5) $-\frac{1}{2}\cdot 0.64^{\frac{1}{2}}$ 6) $196^{\frac{1}{2}}$

4. $\sqrt{120a}$ 의 값이 옹근수로 되기 위해서는 $a$가 어떤 옹근수로 되여야 하는가? 이때 $a$의 제일 작은 령 아닌 옹근수값을 구하여라.

5. $\sqrt{5.6}\approx 2.366$, $\sqrt{56}\approx 7.483$을 리용하여 다음것을 구하여라.

1) $\sqrt{560}$ 2) $\sqrt{0.56}$ 3) $\sqrt{0.056}$

6. 다음 식의 값을 계산하여라.

1) $\sqrt{784}$ 2) $\sqrt{729}$ 3) $\sqrt{11449}$

4) $\sqrt{99225}$ 5) $\sqrt{1062.76}$ 6) $\sqrt{0.064516}$

## 제3절. 뿌리식의 변형

$\sqrt{x+1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{a-5}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+1$과 같이 뿌리기호가 들어있는 식을 뿌리식이라고 부른다. 특히 밑수에 변수가 들어있는 뿌리식을 무리식이라고 부른다.

**례 1** $\sqrt{a-5}$ 는 $a-5\geq 0$ 즉 $a\geq 5$일 때에만 뜻을 가진다. 즉 $\sqrt{a-5}$ 의 뜻구역은 $[5, +\infty)$이다.

**해보기** $a=5$, $a=-5$일 때 $\sqrt{a^2}$ 의 값을 구하여라.

일반적으로 $a\geq 0$일 때에는 $\sqrt{a^2}=a$이고 $a<0$일 때는 $\sqrt{a^2}=-a$이다. 이것을 하나의 식으로 묶으면 다음의 공식을 얻는다.

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

이 공식을 써서 뿌리식을 간단히 변형할수 있다.

**례 2** 1) $a\geq 0$일 때

$$\sqrt{0.04a^2}=\sqrt{(0.2a)^2}=|0.2a|=0.2a$$

2) $b\geq 0$일 때

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=|ab|=|a|b$$

**례 3** $\sqrt{(x-4)^2}=|x-4|=\begin{cases} x-4, & x\geq 4 \\ 4-x, & x<4 \end{cases}$

문 제

1. 다음 뿌리식의 뜻구역을 구하여라.

$$\sqrt{4-x}, \quad \sqrt{\frac{1}{x-2}}, \quad \sqrt{1+x^2}$$

2. $(ab)^{\frac{1}{2}}$은 $a$, $b$가 어떤 값을 가질 때 뜻을 가지는가?

3. 다음 계산이 옳은가?

1) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$ 2) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{2}{3}$

3) $\sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}=4$ 4) $\sqrt{(-4)^2}=|-4|=4$

4. 다음 식을 변형하여라.

1) $\sqrt{(-16)^2}$ 2) $\sqrt{(2.1)^2}$ 3) $\sqrt{(0.02)^2}$ 4) $\sqrt{(-0.82)^2}$ 5) $\sqrt{9x^2}$

6) $\sqrt{x^4}$ 7) $\sqrt{a^2+2a+1}$ 8) $\sqrt{4b^2-4b+1}$ 9) $\sqrt{a^2b^2}$

5. □안에 알맞는 수 또는 크기기호를 써넣어라.

1) $\sqrt{(x+5)^2}=-(x+5)$ ($x$□$-5$)　　2) $\sqrt{(3-x)^2}=x-3$ ($x$□3)

3) $\sqrt{(2x-1)^2}=1-2x$ ($x$□$\frac{1}{2}$)

례 4 다음 뿌리식에서 인수를 뿌리기호밖으로 내보내여라.

1) $\sqrt{0.08}$　　2) $\sqrt{4a^7}$　　3) $\sqrt{a^3b^5}$

(풀이) 1) $\sqrt{0.08}=\sqrt{\frac{8}{100}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{10}=\frac{2}{10}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$

2) $\sqrt{4a^7}=\sqrt{(2a^3)^2a}=\sqrt{(2a^3)^2}\sqrt{a}=2a^3\sqrt{a}$

3) $\sqrt{a^3b^5}=\sqrt{(ab^2)^2ab}=\sqrt{(ab^2)^2}\sqrt{ab}=|a|b^2\sqrt{ab}$

례 5 다음 뿌리식에서 인수를 뿌리기호안에 넣어라.

1) $3\sqrt{5}$　　2) $5\sqrt{\frac{a}{10}}$　　3) $\sqrt{5}\,b$

(풀이) 1) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot5}=\sqrt{45}$

2) $5\sqrt{\frac{a}{10}}=\sqrt{5^2}\sqrt{\frac{a}{10}}=\sqrt{25\cdot\frac{a}{10}}=\sqrt{\frac{5}{2}a}$

3) $b\geq0$이면 $b=\sqrt{b^2}$ 이므로

$$\sqrt{5}b=\sqrt{5}\sqrt{b^2}=\sqrt{5b^2}$$

$b<0$이면 $-b=\sqrt{b^2}$ 이므로 $b=-\sqrt{b^2}$

따라서 $\sqrt{5}b=-\sqrt{5}\sqrt{b^2}=-\sqrt{5b^2}$

## 문 제

1. 다음 뿌리식에서 뿌리기호밖으로 내보낼수 있는 인수를 다 내보내여라.

1) $\sqrt{12x^2}$　　2) $\sqrt{45a^7}$　　3) $\sqrt{-18x^3}$　　4) $\sqrt{\frac{4a^2b^4}{25c^2d^8}}$

2. 다음 뿌리식에서 인수를 뿌리기호안에 넣어라.

1) $5\sqrt{10}$　　2) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$　　3) $\sqrt{2}a(a\geq0)$　　4) $\sqrt{3}b(b<0)$

3. 같기식 $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$ 가 성립하는 때는 (　)이다.

1) $a\ge 0,\ b>0$　　2) $a>0,\ b\ge 0$　　3) $a<0,\ b\ge 0$　　4) $a\le 0,\ b<0$

$-3\sqrt{2}$, $\frac{2}{5}\sqrt{2}$ 와 같이 뿌리밑수가 같은 뿌리식을 한또래뿌리식이라고 부른다.

뿌리식에서도 여러마디식에서와 같이 더하기와 곱하기의 바꿈법칙, 묶음법칙이 성립한다. 그러므로 한또래뿌리식의 정돈에서도 여러마디식이나 분수식을 변형할 때와 같이 정돈, 인수분해 등을 할수 있다.

**례 6** 식 $3\sqrt{2}+\sqrt{x}-\sqrt{2}-3\sqrt{x}$ 를 정돈하여라.

(풀이) 한또래뿌리식들을 정돈하면

$$3\sqrt{2}+\sqrt{x}-\sqrt{2}-3\sqrt{x}=(3\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{x}-3\sqrt{x})$$
$$=(3-1)\cdot\sqrt{2}+(1-3)\sqrt{x}=2\sqrt{2}-2\sqrt{x}$$

분모(또는 분자)에서 뿌리기호를 없애는것을 분모(또는 분자)를 유리화한다고 말한다.

**례 7** 다음 뿌리식의 분모를 유리화하여라.

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　2) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

(풀이) 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5}+1)$

## 문 제

1. 다음 식을 정돈하여라.

1) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}$　　2) $\sqrt{2.5a^5}+4a\sqrt{a^3}-a^2\sqrt{a}$

2. 분모를 유리화하여라.

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$　　2) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$　　3) $\frac{a+b}{2\sqrt{a^2-b^2}}$　　4) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

3. 분자를 유리화하여라.

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 3) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a^2+b^2}$

## 련 습 문 제

1. 다음 뿌리식은 $x$의 어떤 값에 대하여 뜻을 가지는가?

1) $\sqrt{4(x+2)}$ 2) $\sqrt{-x}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

2. 다음 식을 간단하게 변형하여라.

1) $\sqrt{0.01a^2}\ (a>0)$ 2) $\sqrt{\frac{x^2}{100}}\ \ (x<0)$

3) $\sqrt{(4-m)^2}\ \ (m\geq 4)$ 4) $\sqrt{(c+3)^2}\ \ (c<-3)$

3. 어떤 $x$의 값에 다음 갈기식이 성립하는가?

1) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ 2) $\sqrt{4x^2+4x+1}=1+2x$

4. 어떤 글자의 값에 다음 갈기식이 성립하는가?

1) $\sqrt{a^2}=-a$ 2) $\sqrt{b^6}=b^3$

3) $-\sqrt{x^4}=-x^2$ 4) $\sqrt{m^{10}}=m^5$

5. 뿌리기호밖으로 내보낼수 있는 인수는 다 내보내여라.

1) $\sqrt{28}$ 2) $\sqrt{63}$ 3) $\sqrt{432}$

4) $\frac{\sqrt{72}}{2}$ 5) $\sqrt{9a^2b}\ \ (a<0,\ b>0)$

6. 인수를 뿌리기호안에 넣어라.

1) $20\cdot\sqrt{7}$ 2) $-5\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$ 3) $0.5\cdot\sqrt{0.4}$

7. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 와 $\sqrt{a+b}$ 의 크기 비교는 (  )일 때 할수 있다.

1) $a\geq 0,\ b<0$ 2) $a<0,\ b<0$ 3) $a\geq 0,\ b\geq 0$ 4) $a<0,\ b\geq 0$

8. 갈기식 $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$ 가 성립할 때는 (  )이다.

1) $a<0,\ b<0$ 2) $a<0,\ b\geq 0$ 3) $a\geq 0,\ b\geq 0$ 4) $a\geq 0,\ b<0$

9. 다음 □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{7-2\sqrt{21}+\square}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{\square}}=\sqrt{\square}-\sqrt{\square}$

2) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\square}+\sqrt{\square}$ 3) $\sqrt{8-2\sqrt{\square}}=\sqrt{\square}-\sqrt{3}$

10. 다음 식변형에서 틀린것을 찾아라.

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{1-2\sqrt{5}+5}=\sqrt{1^2-2\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}=1-\sqrt{5}$$

11. 다음 갈기식이 옳은가?

1) $\sqrt{64+36}=\sqrt{64}+\sqrt{36}$ 2) $\sqrt{25-16}=\sqrt{25}-\sqrt{16}$

12. 다음 계산을 하여라.

1) $\sqrt{32}+\sqrt{98}-\sqrt{200}$　　2) $\sqrt{12}-\sqrt{72}+2\sqrt{18}-10\sqrt{3}$

3) $\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{1}{2}\sqrt{8}-\frac{1}{5}\sqrt{50}$　　4) $(5\sqrt{a}-3\sqrt{25a})-(2\sqrt{36a}-2\sqrt{9a})$

13. 다음 식을 적의 모양으로 고쳐라.

1) $6+2\sqrt{5}$　　2) $10-2\sqrt{21}$　　3) $9-4\sqrt{5}$　　4) $7+\sqrt{48}$

14. 분모를 유리화하여라.

1) $\frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$　　2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　　3) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

15. 분자를 유리화하여라.

1) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$　　2) $\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$

16. 식 $\frac{3\sqrt{x+1}+5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ 를 간단히 하여라.

17. 다음것을 증명하여라.

$$\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

18. 다음것을 증명하여라.

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2$$

19. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 식 $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하여라.

## 제4절. 삼각비

그림 6－8의 직3각형 ABC에서 각 A를 $\alpha$로 표시하자.

이때 $\triangle AB_1C_1$, $\triangle AB_2C_2$, $\triangle ABC$에서 각 A에 대하여

비

$$\frac{\text{맞은변}}{\text{빗 변}}=\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}=\frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\text{밑 변}}{\text{빗 변}}=\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{AB_2}{AC_2}=\frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\text{맞은변}}{\text{밑 변}}=\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\frac{BC}{AB}$$

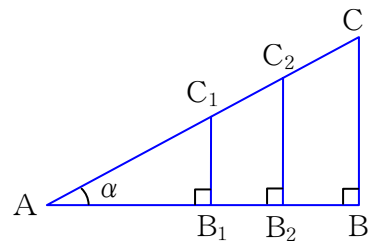



그림 6-8

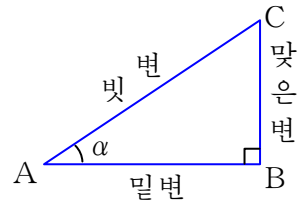
라는것을 알고있다. 이것들을 **삼각비**라고 부른다.

직3각형에서 $\frac{\text{맞은변}}{\text{빗 변}}$을 각 $\alpha$의 **시누스**라고 부르고

$$\sin\alpha=\frac{\text{맞은변}}{\text{빗 변}}$$

와 같이 표시한다.(《**시누스 알파**》라고 읽는다.)

그림 6-9

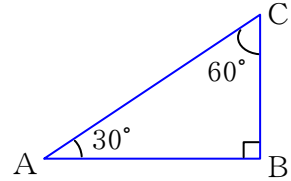
**례 1** sin30°를 구하여라.

**(풀이)** 직3각형 ABC에서 ∠A=30°이므로

∠C=60°

그러므로 BC=1로 놓으면 AC=2

따라서 $\sin30°=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$

그림 6-10

### 문 제

피다고라스공식을 써서 다음것을 구하여라.

1) sin60°　　　　2) sin45°

$\frac{\text{밑 변}}{\text{빗 변}}$을 각 $\alpha$의 **코시누스**라고 부르고

$$\cos\alpha=\frac{\text{밑 변}}{\text{빗 변}}$$

와 같이 표시한다.(《**코시누스 알파**》라고 읽는다.)

**례 2** cos30°를 구하여라.

**(풀이)** 직3각형 ABC에서(그림 6−10) ∠A=30°이므로

BC=1이라고 하면 AC=2

따라서 $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos30°=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

### 문 제

1. 다음것을 구하여라.

   1) cos60°　　　　2) cos45°

2. sin30°와 cos60°, sin60°와 cos30°를 비교하여라.

3. sin45°와 cos45°를 비교하여라.

$\dfrac{\text{맞은변}}{\text{밑　변}}$을 각 $\alpha$의 **탕겐스**라고 부르고

$$\tan\alpha = \frac{\text{맞은변}}{\text{밑　변}}$$

와 같이 표시한다.(《**탕겐스 알파**》라고 읽는다.)

**례 3** tan30°를 구하여라.

**(풀이)** 그림 6－10에서 BC＝1, AB＝$\sqrt{3}$이므로

$$\tan 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### 문 제

1. 다음것을 구하여라.

 1) tan60° 　　　　 2) tan45°

2. tan30°와 $\dfrac{\cos 30°}{\sin 30°}$, $\dfrac{\sin 30°}{\cos 30°}$를 비교하여라.

3. tan60°와 $\dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$, $\dfrac{\cos 60°}{\sin 60°}$를 비교하여라.

## 련 습 문 제

1. sin30°, cos30°, sin60°가운데서 값이 같은것을 찾아보아라.
2. sin45°, tan45°, cos45°가운데서 값이 같은것을 찾아보아라.
3. 다음 빈 칸을 채우라.

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\tan\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | | |
| 45° | | | |
| 60° | | | |

4. $\alpha$＝30°, 45°, 60°에 대하여 다음 식이 성립하겠는가를 알아보아라.

 1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 　　 2) $\sin^2\alpha + \tan^2\alpha = 1$ 　　 3) $\cos^2\alpha + \tan^2\alpha = 1$

## 복 습 문 제

1. $a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이겠는가?
2. 다음 식의 값을 구하여라.
   1) $\sqrt{7225}$  2) $\sqrt{14400}$  3) $\sqrt{10^5}$
   4) $\sqrt{\frac{121}{4225}}$  5) $\sqrt{\frac{(-9)^2}{4}+\frac{(-6)^2}{27}}$
3. $a>0$, $b>0$일 때 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$와 $\sqrt{a+b}$는 어느것이 큰가?
4. 원의 반경을 2배, 3배, $\frac{1}{2}$배 하면 면적은 각각 몇배로 되는가? 거꾸로 원의 면적을 2배, 3배, $\frac{1}{2}$배 되게 하려면 반경을 몇배로 해야 하는가?
5. 면적이 각각 다음과 같은 원의 직경을 구하여라.
   $24\text{cm}^2$,  $200\text{m}^2$
6. $a<0$, $b<0$일 때 $(ab)^{\frac{1}{2}}$과 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$을 뿌리식의 적과 상의 모양으로 변형하여라.
7. $a$와 $b$가 어떤 값을 가질 때 다음 같기식이 옳은가?
   1) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$  2) $\sqrt{a^4b}=a^2\sqrt{b}$
   3) $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$  4) $\sqrt{a^6b}=a^3\sqrt{b}$
8. $a$와 $b$가 어떤 값을 가질 때 다음 뿌리식이 의미를 가지는가?
   1) $\sqrt{a^2b^2}$  2) $\sqrt{(a+b)^2}$
   3) $\sqrt{-ab^2}$  4) $\sqrt{a^2b}$
9. 다음 같기식에서 옳지 않은것을 고쳐보아라.
   1) $\sqrt{0.04}=0.02$  2) $\sqrt{(-0.3)^2}=-0.3$  3) $\sqrt{3^2+4^2}=3+4=7$
10. 다음 계산에서 틀린것을 찾아보아라.
    $m<n$일 때
    $m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2$
    $(m-n)^2=(n-m)^2$
    $\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$
    $m-n=n-m$
    따라서 $m=n$
11. 다음 식을 계산하여라.
    1) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1.6}+3\sqrt{0.4})$
    2) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)$

3) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{ab}{n}\sqrt{mn}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{n}{m}}\right)\cdot a^2b^2\sqrt{\frac{n}{m}}$

4) $(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab)\div\sqrt{ab}\quad(a\geq 0,\ b\geq 0)$

12. 다음 뿌리식을 통분하고 정돈하여라.

1) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$　　2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$　　4) $\frac{1}{a+a\sqrt{b}}-\frac{1}{a-b\sqrt{b}}$

5) $\frac{a}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{\sqrt{ac}-a}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}$　　6) $\frac{1}{a+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2+b^2}}$

13. 다음 뿌리식의 분모를 유리화하여라.

1) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$　　2) $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

3) $\frac{3-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$　　4) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

14. $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$일 때 식 $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}$의 값을 구하여라.

15. $x=a+\sqrt{a^2-1}$일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1) $x+\frac{1}{x}$　　2) $x^2+\frac{1}{x^2}$　　3) $x^3+\frac{1}{x^3}$　　4) $x^4+\frac{1}{x^4}$

16. $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$일 때

$$\sqrt{x^2-1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right),\ (a\geq 1)\\ -\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right),\ (0<a<1)\end{cases}$$

이라는것을 증명하여라.

17. $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$일 때 $x^4+x^2y^2+y^4$의 값을 구하여라.

18. 다음 같기식에서 $x$를 구하여라.

1) $\sin 60°=2\sin 30°\cos x$

2) $\cos 60°=\cos^2 30°-\sin^2 x$

# 제7장. 방정식

2차방정식

2차방정식 세우기

## 제1절. 2차방정식

### 1. 인수분해에 의한 2차방정식의 풀이법

**알아보기** 다음것이 옳은가?

1) $ab=0$이면 $a=0$이다.
2) $ab=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.
3) $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이다.
4) $a=0$ 또는 $b=0$이면 $ab=0$이다.

2차방정식의 왼변이 두 1차식의 적으로 인수분해되면 그 풀이는 쉽게 구할수 있다.

실례로 2차방정식 $x^2-3x-18=0$을 다음과 같이 풀수 있다.

방정식에서 왼변을 인수분해하면

$$x^2-3x-18=(x-6)(x+3)$$

따라서 $x-6=0$ 또는 $x+3=0$

즉 $x=6$, $x=-3$

풀이모임 $\{-3, 6\}$

$$ax^2+bx+c=a(x-p)(x-q)\ (a\neq0)$$

이면 2차방정식

$$ax^2+bx+c=0$$

의 풀이는 $p$와 $q$이다.

**례** 2차방정식 $x^2+4x-21=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2+4x-21=(x+7)(x-3)=0$

따라서 $x+7=0$ 또는 $x-3=0$

즉 $x=-7$, $x=3$

풀이모임 $\{-7, 3\}$

### 문 제

1. 다음 2차방정식을 풀어라.

1) $x^2+13x+36=0$　　2) $x^2+12x=-36$　　3) $3(x-2)=x^2-2x$

4) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$　　5) $ax^2+(a+b)x+b=0$　　6) $(y+3)^2-11(y+3)+24=0$

2. $x^2+mx-12=(x+a)(x+b)$에서 $a$, $b$는 옹근수이다. 인수분해가 성립되는 $m$의 값은 모두 (  )개이다.

1) 2  2) 4  3) 6  4) 8

## 2. 2차3마디식의 변형

결수가 1인 2차3마디식을 $(x+m)^2-n\ (n\geq 0)$모양으로 변형할수 있다.

실례로 1) $x^2-3x=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

2) $x^2+5x+3=x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+3$

$$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+3=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5^2-4\cdot 3}{4}$$

일반적으로 다음 식이 성립한다.

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4c}{4}$$

$ax^2+bx+c$는 $a(x+m)^2-n$모양으로 변형할수 있다.

실례로 $3x^2+7x-5=3\left(x^2+\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}\right)$

$$=3\left[x^2+2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2-\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{5}{3}\right]$$

$$=3\left[\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{109}{36}\right]$$

$$=3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{7^2-4\cdot 3\cdot(-5)}{4\cdot 3}$$

2차식 $ax^2+bx+c$을 $a(x+m)^2-n$모양으로 변형하는것을 완전2제곱분리한다고 말한다.

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

## 문 제

1. 다음 식을 $(x+m)^2-n$모양으로 변형하여라.

1) $x^2+2x$ 2) $y^2+3y$ 3) $z^2-12z$ 4) $0.6x-x^2$
5) $x^2-x-12$ 6) $x^2+0.4x+3$ 7) $32-12x+x^2$ 8) $-x^2+14x+24$

2. $(x+m)^2-n$모양으로 변형하여 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-5x+3=0$ 2) $8-3x-x^2=0$

3. 다음식들을 완전2제곱분리하여라.

1) $4x^2+12x-7$ 2) $3x^2-7x+5$ 3) $2t^2-t-6$ 4) $2y^2+5y-1$
5) $10-9x-2x^2$ 6) $\frac{1}{2}z^2-4z+5$ 7) $0.3x^2-x+0.5$ 8) $\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}$

### 3. 2차방정식의 풀이공식

2차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 풀이공식을 만들어보자.
방정식의 왼변을 완전2제곱분리하면

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$b^2-4ac\geq 0$이면

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

**$ax^2+bx+c=0$의 풀이공식**

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (b^2-4ac\geq 0)$$

특히 $b^2-4ac=0$이면

$$x_{1,\,2}=-\frac{b}{2a} \quad \text{(겹풀이)}$$

례 1 2차방정식 $3x^2+2x-5=0$을 풀어라.

(풀이) $a=3$, $b=2$, $c=-5$이므로

$$b^2-4ac=4-4\cdot3\cdot(-5)=64>0$$

따라서 방정식은 두개의 풀이를 가진다.

$$x_{1,\ 2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm8}{2\cdot3}$$

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{5}{3}$$

풀이모임 $\{-1\frac{2}{3},\ 1\}$

례 2 2차방정식 $4x^2-12x+9=0$을 풀어라.

(풀이) $a=4$, $b=-12$, $c=9$이므로

$$b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$$

따라서 방정식은 겹풀이를 가진다.

$$x_{1,2}=\frac{12}{2\cdot4}=\frac{3}{2}$$

풀이모임 $\{1\frac{1}{2}\}$

문 제

1. 다음 2차방정식을 풀어라.

1) $2x^2+3x+1=0$ 2) $3x^2+7x+1=0$ 3) $3x^2-7x+4=0$

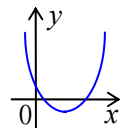
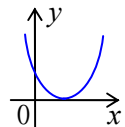
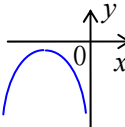
4) $9x^2+3x-20=0$ 5) $2x^2+8x+2=0$ 6) $9x^2-6x+1=0$

2. 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 1차마디식의 곁수 $b$가 짝수일 때 풀이공식은 어떻게 되겠는가?

3. 방정식 $x^2-|x|-1=0$의 풀이는 (   )이다.

1) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 2) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 3) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 4) $\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

### 4. 2차방정식의 판별식

알아보기 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이공식에서 $D=b^2-4ac$로 놓자.

1) $D>0$이면 풀이는 몇개인가? 그리고 풀이는 어떻게 표시되는가?

2) $D=0$이면 풀이는 몇개인가? 그리고 풀이는 어떻게 표시되는가?

3) D<0이면 풀이가 있는가?

2차방정식의 풀이가 몇개인가를 알자면 $D=b^2-4ac$의 값을 0과 비교하면 된다. $D=b^2-4ac$를 2차방정식의 **판별식**이라고 부른다.

| 판별식의 값 | 풀 이 | 풀이의 개수 |
|---|---|---|
| $D>0$ | $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ | 서로 다른 풀이 2개 |
| $D=0$ | $x=-\frac{b}{2a}$ | 풀이 1개 (겹풀이) |
| $D<0$ | 풀이가 없다 | |

**례** 다음 방정식의 풀이는 몇개인가?

1) $2x^2-3x+1=0$　　2) $4x^2-9x+6=0$　　3) $9x^2-24x+16=0$

(풀이) 1) $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=1>0$이므로 서로 다른 풀이 2개를 가진다.

2) $D=(-9)^2-4\cdot4\cdot6=-15<0$이므로 풀이는 가지지 않는다.

3) $D=(-24)^2-4\cdot9\cdot16=0$이므로 겹풀이 1개를 가진다.

## 문 제

1. 다음 방정식은 몇개의 풀이를 가지는가?

1) $7x^2+6x-3=0$　　2) $16x^2-8x+1=0$

3) $10x^2-3x+5=0$　　4) $(x+1)^2=2x^2-5$

2. $m$이 어떤 값을 가질 때 다음 방정식이 서로 다른 두개의 풀이를 가지겠는가?

1) $3x^2-10x+m=0$　　2) $mx^2+3x-1=0$

3. $k$가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식은 겹풀이를 가지는가?

1) $3x^2+2x+k=0$　　2) $kx^2+3x-1=0$　　3) $x^2-4kx+8k-3=0$

4. 방정식 $(m^2-2)x^2-2(m+1)=0$이 두개의 서로 다른 실수풀이를 가지려면 (　)이다.

1) $m>-\frac{3}{2}$　　2) $m>-\frac{3}{2}$, $m\neq\pm\sqrt{2}$

3) $m>-1$, $m\neq\pm1$　　4) $m\neq\pm\sqrt{2}$　　5) $-\sqrt{2}<m<-1$ 또는 $m>\sqrt{2}$

## 5. 2차방정식의 풀이와 결수사이의 관계

2차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$에서 판별식 $D=b^2-4ac\geq0$이라고 하면

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

이때

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$p$, $q$가 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 풀이이면

$$p+q=-\frac{b}{a}\qquad p\cdot q=\frac{c}{a}$$

**례** 다음 방정식의 두 풀이의 합과 적을 구하여라.

$$2x^2+x-6=0$$

(풀이) $a=2$, $b=1$, $c=-6$이므로

$$D=1^2-4\cdot2\cdot(-6)=49>0$$

따라서 두개의 풀이 $p$와 $q$를 가진다.

$$p+q=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}\qquad\qquad p\cdot q=\frac{c}{a}=\frac{-6}{2}=-3$$

### 문 제

1. 2차방정식 $x^2+px+18=0$의 한 풀이가 6이다. 다른 한 풀이와 결수 $p$를 구하여라.
2. 2차방정식 $x^2-m^2x+3n-1=0$의 풀이는 2와 7이다. $m$과 $n$의 값을 구하여라.
3. 2차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 풀이를 $p$, $q$라고 할 때 $p-3$, $q-3$을 풀이로 가지는 2차방정식을 만들어라.

4. 방정식 $2x^2-(a+1)x+a+3=0$의 두 풀이의 차가 1이면 $a$의 값은 (  )이다.

1) 9와 $-3$  2) 9와 3  3) $-9$와 3  4) $-9$와 $-3$

## 6. 2차방정식으로 이끌어지는 방정식

**례 1** 다음 방정식을 풀어라.

$$2x^4-9x^2+4=0$$

(풀이) $x^2=y$로 놓으면 $2y^2-9y+4=0$

$$(2y-1)(y-4)=0$$

$$y_1=\frac{1}{2}, \quad y_2=4$$

$$x^2=\frac{1}{2}, \quad x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2=4, \quad x_3=2, \quad x_4=-2$$

풀이모임 $\left\{-2, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ 2\right\}$

**례 2** 다음 방정식을 풀어라.

$$(x^2+x-3)(x^2+x-5)-3=0$$

(풀이) $x^2+x=y$로 놓으면

$$(y-3)(y-5)-3=0$$

$$y^2-8y+15-3=y^2-8y+12=(y-2)(y-6)=0$$

$$y_1=2, \quad y_2=6$$

$$x^2+x=2, \quad x^2+x-2=0, \quad x_1=-2, \quad x_2=1$$

$$x^2+x=6, \quad x^2+x-6=0, \quad x_3=-3, \quad x_4=2$$

풀이모임 $\{-3, \ -2, \ 1, \ 2\}$

### 문 제

다음 방정식을 풀어라.

1. 1) $3x^4-8x^2-3=0$  2) $6x^4-19x^2+10=0$  3) $5x^4-22x^2+8=0$

2. 1) $(x^2-3x)^2-16(x^2-3x)=0$  2) $(x^2+4x+5)^2-12(x^2+4x)-40=0$

   3) $(3x^2-7x+2)^2-7(3x^2-7x+1)+3=0$

**례 3** 다음 방정식을 풀어라.

$$2x^4-3x^3+2x^2-3x+2=0$$

(풀이) 왼변을 $x^2$으로 나누면($x=0$은 풀이가 아니므로 $x^2 \neq 0$)

$$2x^2-3x+2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-3(x+\frac{1}{x})+2=0$$

$x+\frac{1}{x}=y$로 놓으면 $(x+\frac{1}{x})^2=y^2$이므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-3(x+\frac{1}{x})+2=2(y^2-2)-3y+2=$$

$$=2y^2-3y-2=(2y+1)(y-2)=0$$

$y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=2$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$, $2x^2+x+2=0$, 풀이는 없다.

$x+\frac{1}{x}=2$, $x^2-2x+1=0$, $x_1=x_2=1$

풀이모임 $\{1\}$

## 문 제

다음 방정식을 풀어라.

1) $3x^4-5x^3+4x^2-5x+3=0$

2) $2x^4-x^3-10x^2+x+2=0$

3) $4x^4-13x^3+17x^2-13x+4=0$

**례 4** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y=7 & ① \\ xy=10 & ② \end{cases}$$

(풀이) 방정식 ①로부터

$$y=7-x \quad ③$$

이것을 ②에 갈아넣고 정돈하면

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-5)(x-2)=0$$

$$x_1=5,\ x_2=2$$

이것을 각각 ③에 갈아넣으면

$y_1=2$, $y_2=5$

풀이모임 $\{(5, 2), (2, 5)\}$

**례 5** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 & ① \\ 4x^2-9xy+y^2=-14 & ② \end{cases}$$

(풀이) ①×2+②

$$6x^2-11xy+3y^2=0 \qquad ③$$

왼변을 인수분해하면

$$(3x-y)(2x-3y)=0$$

이로부터

$$3x-y=0, \ 2x-3y=0 \qquad ④$$

이리하여 ①과 ④로 된 두개의 련립방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} 3x-y=0 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=0 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$$

이것을 각각 풀면 4개의 풀이를 얻는다.

풀이모임 $\{(1, 3), (-1, -3), (3, 2), (-3, -2)\}$

## 문 제

다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} xy=18 \\ x-y=10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x^2+y^2-6y=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 \\ x^2-2y^2=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44 \\ 2x^2-xy+y^2=16 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 6x^2+xy-y^2+25y=150 \end{cases}$

## 련 습 문 제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-x-2=0$ 2) $y^2+y-12=0$ 3) $z^2+8z+16=0$

4) $t^2+2t-48=0$ 5) $u^2-4u-32=0$

2. 다음 식을 $a(x+m)^2-n$모양으로 변형하여라.

1) $x^2-8x$ 2) $x^2+10x+21$ 3) $5x-x^2$

4) $x^2-3x+1$ 5) $3x^2-7x+2$ 6) $-2x^2+6x+5$

**3.** 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2+5x+3=0$ 2) $x^2-0.2x-0.03=0$ 3) $y^2-2.4y-13=0$

4) $t^2-\frac{2}{3}t-\frac{1}{2}=0$ 5) $\frac{1}{2}u^2-\frac{5}{3}u=\frac{4}{3}$ 6) $\frac{x^2+1}{10}=\frac{x}{3}$

**4.** 다음 방정식은 풀이를 가지지 않는다. 그 리유를 말하여라.

1) $x^2+x+3=0$ 2) $(x-3)^2+5=0$ 3) $3x^2-8x+6=0$

**5.** 만일 $x_1$, $x_2$이 방정식 $x^2+2x-k=0$의 2개의 서로 다른 실수풀이이면 ${x_1}^2+{x_2}^2-2$는 ( )이다.

1) 정수 2) 령 3) 부수 4) 령보다 크지 않는 수

**6.** 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2+2ax-3a^2=0$ 2) $y^2-4ay+4a^2=b^2$ 3) $x^2-3ax+2a^2-ab-b^2=0$

**7.** 다음 방정식의 풀이의 개수를 구하여라.

1) $x^2-4x-4=0$ 2) $-7x^2+x-1=0$ 3) $72x-4=x^2$

**8.** $k$가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식이 겹풀이를 가지는가?

1) $x^2-kx+4=0$ 2) $kx^2+4x+1=0$

3) $2x^2-4x+k=0$ 4) $x^2+kx+k-1=0$

**9.** $k$가 어떤 값을 가질 때 방정식 $5x^2-7x+k=0$이 두개의 풀이를 가지겠는가?

**10.** $p$, $q$가 2차방정식 $3x^2+5x+1=0$의 령 아닌 두 풀이일 때 다음 값들을 계산하여라.

1) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 2) $\frac{q}{p}+\frac{p}{q}$ 3) $p^3+q^3$

**11.** 2차방정식 $9x^2-2mx+m-5=0$에 대하여 두 풀이의 차가 2로 되는 $m$의 값을 구하여라.

**12.** 방정식 $(a-1)x^2-(2a-1)x+a+1=0$의 풀이는 모두 정수이다. 이때 취할수 있는 $a$의 값범위는 ( )이다.

1) $a<-1$ 또는 $a\geq 1$ 2) $a<-1$ 또는 $1<a\leq\frac{5}{4}$

3) $a<-1$ 또는 $a>1$ 4) $a<-1$ 또는 $1\leq a\leq\frac{5}{4}$

**13.** 2차방정식 $x^2-2mx+m^2-1=0$의 두 풀이가 $-2$, 4사이에 놓이도록 $m$의 값을 결정하여라.

**14.** 방정식 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$이 2개의 서로 다른 정의 옹근수풀이를 가진다. 옹근수 $k$의 값과 그에 맞는 풀이는 ( )이다.

1) $k=2$일 때 $\{4, 6\}$ 2) $k=3$일 때 $\{5, 6\}$ 3) $k=4$일 때 $\{6, 7\}$

15. 방정식 $x^2-kx+k^2-13=0$의 한 풀이는 다른 풀이의 3배이다. 실수 $k$의 값을 구하여라.

16. 2차방정식 $x^2-(m-1)x+m=0$에 대하여 두 풀이의 비가 2 : 3이 되는 $m$의 값을 구하여라.

17. 다음 방정식을 풀어라.

1) $3x^4+7x^2-6=0$ 2) $(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)-12=0$ 3) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

18. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x^2-y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=-54 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+y^2=89 \end{cases}$

19. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2-xy-y^2=19 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-2y=3 \\ x^2+y^2=2(x-y)^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x^2-19xy-7y^2=0 \\ xy+y^2=18 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy-x+y=7 \\ xy+x=13+y \end{cases}$

**탐 구**

1. 2차방정식에서 풀이와 결수사이의 관계를 다음과 같은 방법으로도 이끌어낼수 있다.

2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 풀이를 $p$, $q$라고 하면 다음 같기식이 성립한다.

$$ax^2+bx+c=a(x-p)(x-q)$$

웃식에서 오른변을 정돈하고 결수들을 비교하면 다음 같기식이 성립한다.

$$-a(p+q)=b$$

$$apq=c$$

즉

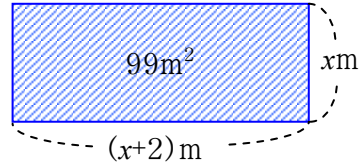
$$p+q=-\frac{b}{a}$$

$$pq=\frac{c}{a}$$

3차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 풀이와 결수사이에는 어떤 관계가 있는가?

2. 판별식이 부 아닌 두개의 2차방정식 $x^2+b_1x+c_1=0$, $x^2+b_2x+c_2=0$이 공통풀이를 가지기 위해서는 결수들사이에는 어떤 관계가 있는가?

## 제2절. 2차방정식 세우기

**례 1** 토끼를 많이 기를데 대하여 주신 위대한 령도자 **김정일**대원수님의 유훈을 높이 받들고 어느 한 학교에서 토끼우리를 새로 더 지으려고 한다. 면적은 $99m^2$, 길이는 너비보다 2m 더 긴 직4각형모양의 부지를 잡으려면 길이와 너비를 얼마씩 잡아야 하는가?

(풀이)

| | |
|---|---|
| (1) 토끼우리의 너비를 $x$m라고 하자. | (1) 구하려는 량을 표시하는 글자를 정한다. |
| (2) 면적이 $99m^2$이므로 이것을 방정식으로 옮겨쓰면 $x \cdot (x+2) = 99$ (너비 · 길이 → 면적) | (2) 같아질 조건을 식으로 옮겨쓴다. |
| (3) $x^2+2x-99=0$<br>$(x+11)(x-9)=0$<br>풀이는 $-11$, 9 | (3) 방정식을 푼다. |
| (4) 너비 $x$는 정수여야 하므로 풀이 $-11$은 버린다.<br>답. 너비 9m<br>길이 11m | (4) 방정식의 풀이가 문제의 조건에 맞는가 따져본다.<br>문제의 조건에 맞지 않는것은 버린다. |

### 문 제

1. 련이어있는 두 자연수의 두 제곱의 합은 365이다. 두 수를 구하여라.
2. 어떤 자연수와 그보다 5만큼 큰 수의 적은 14이다. 그 수들을 구하여라.
3. 련이어있는 3개의 정의 짝수가운데서 제일 큰 수의 2제곱은 다른 두 수의 2제곱의 합보다 12만큼 더 크다. 세 수를 구하여라.

4. 길이가 너비의 2배인 직4각형모양의 철판의 네 귀에서 한 변이 5cm인 바른4각형을 잘라내고 접어서 용적이 1 500cm$^3$인 그릇을 만들었다. 너비가 얼마인 철판을 썼는가?

**례 2** 어떤 물체를 우로 곧추 던졌는데 $t$초사이에 올라간 높이는 $(30t-5t^2)$m이다. 물체를 던진 후 몇초후에 그 높이가 40m로 되겠는가?

(풀이) $30t-5t^2=40$에 맞는 $t$의 값을 구해야 한다.

이 방정식을 정돈하고 풀면

$$t^2-6t+8=0$$

$$(t-2)(t-4)=0$$

$$t_1=2,\ t_2=4$$

두 풀이는 다 문제의 조건에 맞는다.

여기서 2초는 올라갈 때이고 4초는 내려올 때이다.

답. 2초, 4초

**례 3** 20%짜리 소금물 50kg이 통에 들어있다. 이것을 11.2%짜리 소금물로 만들기 위하여 통에서 몇kg 퍼내고 그만큼 물을 넣었다. 잘 섞은 다음 처음 퍼낸 량의 1.5배만큼 퍼내고 그만큼 물을 넣어서 만들려는 소금물을 얻었다. 처음 몇kg의 소금물을 퍼냈는가?

(풀이) 처음 퍼낸 소금물이 $x$kg이라고 하자.

20%짜리 소금물 50kg에 들어있는 소금량은

$$50\times0.2=10$$

50kg의 소금물에서 $x$kg을 퍼내고 그만큼 물을 넣었을 때 통에 남는 소금량은

$$10\times\frac{50-x}{50}$$

다시 1.5배를 퍼내고 그만큼 물을 넣었을 때 통에 남는 소금량은

$$\left(10\times\frac{50-x}{50}\right)\times\left(\frac{50-1.5x}{50}\right)$$

11.2%짜리 소금물 50kg에 들어있는 소금량은

$$50\times\frac{11.2}{100}=5.6$$

문제의 조건에 맞는 방정식을 만들면

$$\left(10\times\frac{50-x}{50}\right)\times\left(\frac{50-1.5x}{50}\right)=5.6$$

이 방정식을 정돈하고 풀면

$$3x^2-250x+2200=0$$

$$(x-10)(3x-220)=0$$

$$x=10,\ x=\frac{220}{3}$$

그런데 퍼내는 소금물이 50kg을 넘을수 없으므로 $\frac{220}{3}$은 버린다.

답. 10kg

## 문 제

1. 례 2에서 물체가 25m 높이에 이르는것은 몇초만인가? 또 몇초만에 물체가 땅에 떨어지겠는가?
2. 직3각형의 면적은 150cm$^2$이고 직각변들의 합은 35cm이다. 이 3각형의 둘레의 길이를 구하여라.
3. 직3각형의 빗변의 길이는 10cm이고 직각변들의 비는 3:4이다. 직각변들의 길이를 구하여라.
4. 농도가 50%인 용액 45L가 통에 들어있다. 이것을 32%짜리 용액으로 만들기 위하여 통에서 몇L 퍼내고 그만큼 물을 넣었다. 잘 섞은 다음 다시 처음에 퍼낸 량만큼 퍼내고 그만큼 물을 넣었더니 요구되는 용액이 얻어졌다. 얼마씩 퍼냈는가?

## 련 습 문 제

1. 련이어있는 다섯개의 옹근수가 있다. 첫 세 수의 2제곱의 합이 나머지 두 수의 2제곱의 합과 같다. 이 수들을 구하여라.
2. 어떤 다각형의 대각선의 수가 모두 27개이다. 변의 개수를 구하여라.
3. 위대한 조국해방전쟁시기 어느 한 마을의 인민들이 미제원쑤놈들을 족치는 우리 인민군용사들을 도와 탄약상자를 날랐다. 나른 상자수는 두자리수인데 열의 자리수자는 하나의 자리수자보다 2만큼 크고 그 적은 48이다. 나른 상자수는 얼마인가?

4. 바른4각형모양의 철판에서 변두리를 따라 폭이 3m인 띠를 잘라내면 남은 철판의 면적이 196cm$^2$로 된다. 처음 철판의 면적은 얼마인가?

5. 직3각형의 한 직각변과 빗변의 비는 12 : 13이고 다른 직각변은 15cm이다. 이 직3각형의 둘레의 길이를 구하여라.

6. 어떤 물체를 우로 곧추 던졌는데 $t$s동안에 $(40t-5t^2)$m 올라간다면 몇초만에 80m의 높이에 있겠는가?

7. 바른4각형모양의 얇은 철판의 네 모서리에서 한 변이 4cm인 바른4각형을 잘라내고 접어서 용적이 1 600cm$^2$인 함을 만들려고 한다. 한 변의 길이가 얼마인 철판을 써야 하는가?

8. 32%짜리와 24%짜리 소금물이 통 A와 B에 각각 300L씩 들어있다. 통 A에서 얼마만큼 퍼내여 통 B에 넣고 잘 섞은 다음 넣은 량의 2배만큼 퍼내여 통 A에 넣었더니 29%짜리 소금물이 얻어졌다. 처음에 통 A에서 몇L를 퍼냈는가?

## 복 습 문 제

1. 다음 방정식을 인수분해하는 방법으로 풀어라.

1) $x^2+9x-10=0$　　2) $y^2-27y+72=0$

3) $2z^2+5z-12=0$　　4) $6t^2-11t+10=0$

5) $2(u-3)^2-5(u-3)+2=0$　　6) $x^2+2ax+(a^2-b^2)=0$

2. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-0.3x-1.2=0$　　2) $x^2-3\dfrac{5}{12}x+2=0$

3) $x^2-\dfrac{12}{5}x-13=0$　　4) $3x^2+11x+6=0$

5) $(x-4)(4x-3)+3=0$　　6) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $3y^2+(1-6b)y=2b$　　2) $ax^2+(a+1)x+1=0$

3) $a^2(x^2-x+1)-a(x^2-1)=(a^2-1)x$

4. 다음 방정식을 풀어라.

1) $2x^2-2\sqrt{5}x+\sqrt{6}=0$　　2) $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x-2=0$

3) $x^2+|x|-12=0$

5. $a$가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식은 풀이를 가지는가?

1) $2x^2+5x+a=0$　　2) $ax^2-7x-1=0$

6. $a$가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식은 풀이를 가지지 않는가?

1) $3x^2-2x+a=0$　　2) $4x^2+ax+1=0$

7. 방정식 $ax^2-(a-3)x+a-2=0$이

1) 풀이를 가지도록 $a$의 값을 정하여라.

2) 정의 옹근수풀이를 가지도록 $a$의 옹근수값을 정하여라.

8. 방정식 $3(x-1)(x-2k)=(k-2)x$의 두 풀이의 합과 적이 같게 되자면 $k$가 어떤 값을 가져야 하는가? 그때의 풀이를 구하여라.

9. 방정식 $ax^2+bx+3c=0$의 두 풀이를 $p$, $q$라고 할 때 다음 식을 $a$, $b$, $c$로 표시하여라.

1) $\frac{p}{p+1}+\frac{q}{q+1}$　　2) $p^3+q^3$

10. 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 풀이에서 각각 1을 던것이 $x^2+a^2x+ab=0$의 풀이와 같다. $a$와 $b$의 값과 첫 방정식의 풀이를 구하여라.

11. 방정식 $2x^2+ax-2=0$의 2개 풀이의 차의 절대값이 $\frac{5}{2}$일 때 $a$는 얼마인가?

12. 두 방정식 $ax^2-6x+1=0$, $4x^2+(1+a)x+1=0$이 모두 풀이를 가지게 되는 $a$의 값모임을 구하여라.

13. 방정식 $9x^2-2ax+a-5=0$의 두 풀이의 차가 2이다. $a$의 값을 구하여라.

14. 옹근수결수2차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$에 대하여 $a$, $b$, $c$가 모두 홀수이면 방정식은 (　　)를 가지지 않는다.

1) 무리수풀이　　2) 옹근수풀이　　3) 유리수풀이　　4) 실수풀이

15. $a$가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식이 겹풀이를 가지는가?

1) $3x^2-10x+a=0$　　2) $ax^2-3x-2=0$　　3) $x^2-ax+2a-3=0$

16. 방정식 $x^2+bx+c=0$의 두 풀이가 정수로 되기 위해서는 결수 $b$와 $c$가 어떤 조건을 만족시켜야 하는가?

17. 방정식 $x^2+bx+c=0$은 $b+c+1<0$일 때 두개의 풀이를 가진다는것을 증명하여라. 여기서 $b\neq-2$이다.

18. 방정식 $x^4-a^2=x^2-5a+6$이 4개의 풀이를 가지기 위해서는 $a$가 어떤 범위의 값이 되여야 하는가?

19. 방정식 $(1-a^2)x^2+2ax-1=0$의 적어도 한 풀이가 구간 (0, 1)에 있도록 $a$의 값을 정하여라.

20. 방정식 $x^2-kx+k^2-4=0$이 주어졌다. 이 방정식의 두 풀이가 모두 정수로 되는 $k$의 값범위를 구하여라.

21. 2차방정식 $(2k+1)x^2-(2k-1)x-2=0$의 두 풀이가 모두 옹근수가 되게 하는 $k$의 개수를 구하여라.

1) 1개　　2) 2개　　3) 0　　4) 결정할수 없다.

22. $x$에 관한 방정식 $x^2+4mx+4m^2+2m+3=0$, $x^2+(2m+1)x+m^2=0$가운데서 적어도 1개방정식이 실수풀이를 가지면 $m$의 값범위는 얼마인가?

1) $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{4}$　　2) $m\leq-\frac{3}{2}$ 또는 $m\geq-\frac{1}{4}$

3) $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$　　4) $m\leq-\frac{3}{2}$ 또는 $m\geq\frac{1}{2}$

23. $m$이 어떤 값을 잡을 때 방정식 $3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=12-m^2$의 두 풀이가 서로 반대수로 되겠는가?

24. 다음 방정식을 풀어라.

1) $(3x-2)^2+4(3x-2)-12=0$　　2) $(x^2+x+3)(x^2+x-1)-5=0$

3) $(x^2+3x+4)^2+3x(x^2+3x+4)+2x^2=0$　　4) $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$

5) $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$

25. 지난 조국해방전쟁시기 우리의 인민군용사들은 위대한 수령 **김일성**대원수님의 명령을 높이 받들고 미제침략자들을 비롯한 원쑤놈들을 무자비하게 소멸하였다. 조국해방전쟁시기에 나온 전투영웅의 수는 300보다 큰 세자리수이다. 백의 자리수자는 열의 자리수자보다 2만큼 크고 하나의 자리수자는 열의 자리수자와 같다. 백의 자리수자와 열의 자리수자의 적은 하나의 자리수자의 5배이다. 전투영웅수를 구하여라.

26. 어떤 바른6면체의 모든 변을 2cm만큼 늘이면 체적은 386cm$^3$만큼 늘어난다고 한다. 바른6면체의 한 변의 길이를 구하여라.

27. 길이가 25m, 너비가 18m인 직4각형모양의 철판에서 가장 큰 원판을 잘라내고 나머지 부분에서 또 가장 큰 원판을 잘라내려고 한다. 작은 원판의 반경을 구하여라.

28. 길이가 6m, 너비가 3m인 식탁에 보를 씌우려고 한다. 보의 면적은 식탁의 면적의 2배이고 드리우는 부분의 폭은 다같다. 보의 길이와 너비는 얼마인가?

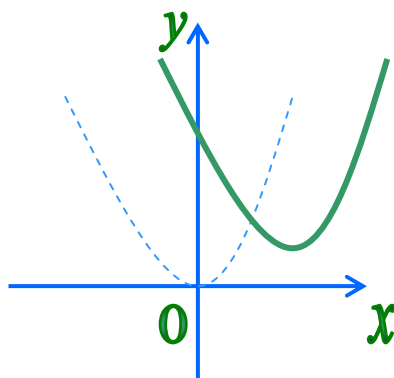
29. 5L의 알콜이 들어있는 통 A와 10L의 물이 들어있는 통 B가 있다. 두 통에서 각각 같은 량의 알콜과 물을 퍼내여 서로 바꾸어넣었다. 잘 섞은 다음 한번 더 그렇게 하였더니 두 통에서 알콜의 농도가 같게 되였다고 한다. 처음에 통 A에서 몇L의 알콜을 퍼냈는가?

30. 2차방정식으로 그려지는 실천문제를 만들고 풀어라.

상 식

### 방정식과 갈롸

갈롸(1811년-1832년)는 프랑스수학자로서 현대대수학의 창시자들가운데의 한 사람이다. 이딸리아수학자들인 카르다노와 페라리에 의하여 1745년에 3차방정식과 4차방정식의 풀이법들이 발표된 후 세계의 수많은 수학자들은 거의 300년동안 5차이상의 방정식의 풀이공식을 이끌어내기 위한 고심어린 연구를 진행하였지만 이렇다할 결과를 얻지 못하였다. 갈롸는 17살에 임의의 차수를 가진 방정식을 대수적방법으로 푸는 문제(방정식의 풀이공식을 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기, 제곱뿌리산법에 의하여 표시하는 문제)를 완전히 해명함으로써 300년동안 내려오던 이 문제에 대한 종지부를 찍었다. 그는 5차이상의 방정식을 대수적방법으로 푸는것은 불가능하다는것을 증명하였을뿐만아니라 임의의 차수를 가진 방정식이 대수적방법으로 풀리기 위한 필요충분조건을 밝혔다. 그리고 그 과정에 완전히 새로운 대수학리론인 갈롸리론을 내놓았다.

# 제8장. 1차함수, 2차함수

$$y=ax+b$$

## 제1절. 함 수

### 1. 함수의 의미

**해보기** $y=2x+3$에서 변수 $x$의 값이 $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2, \cdots$ 일 때 $y$의 값을 구하여라.

$y=2x+3$을 $f(x)=2x+3$과 같이 표시하면 편리할 때가 많다.

$f(x)=2x+3$에서

$$f(-1)=2\cdot(-1)+3=1$$
$$f(0)=2\cdot 0+3=3$$
$$f(1)=2\cdot 1+3=5$$
$$f(2)=2\cdot 2+3=7$$

여기서 $f$는 《2에 변수 $x$를 곱한 적에 3을 더한다.》는 규칙을 나타낸다.

서로 다른 규칙들은 글자 $f$, $g$, $h$로 표시하여 구별한다.

**례 1** $f(x)=2x^2-1$에서 $f$는 《변수 $x$의 2제곱에 2를 곱한 적에서 1을 던다.》라는 규칙을 나타낸다.

이때

$$f(1)=2\cdot 1^2-1=2-1=1$$
$$f(0)=2\cdot 0-1=-1$$
$$f(-3)=2\cdot(-3)^2-1=18-1=17$$

**례 2** 《변수 $x$의 $a$배에 $b$를 더한다.》는 규칙을 $g$라고 하고 이 규칙을 식으로 표시하면 $g(x)=ax+b$

이때

$$g(0)=a\cdot 0+b=b$$
$$g(2)=a\cdot 2+b=2a+b$$
$$g(-2)=a(-2)+b=-2a+b$$

### 문 제

1. $f(x)=3x^2-x+2$에서 다음것을 구하여라.

   1) $f(1)$ 2) $f(0)$ 3) $f(-1)$ 4) $f(-3)$ 5) $f(-10)$

2. $g(x)=5-2x$에서 $g$는 어떤 규칙을 나타내는가? $g(-3)$, $g(0)$, $g(4)$를 구하여라.

**알아보기** $y=3x-2$를 $y=f(x)$로 표시한다면 $f$는 어떤 규칙을 나타내겠는가?

이 규칙에 따라 다음 표의 빈 칸에 알맞는 값을 써넣어라.

변수 $x$의 매개 값에 대응되는 변수 $y$의 값은 몇개씩인가?

| $x$ | … | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | … | $-8$ | | | | | … |

어떤 규칙 $f$에 의하여 변수 $x$의 매개 값에 변수 $y$의 값이 꼭 하나씩 대응되면 이 규칙 $f$를 함수라고 부르고

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{또는} \quad y=f(x)$$

와 같이 표시한다. 이때 $x$를 독립변수, $y$를 종속변수라고 부른다.

규칙 $f$는 보통 식으로 준다.

**례 3** $y=2x-3$은 함수이다.

그것은 $x$의 매개 값에 그의 2배에서 3을 던 차의 값을 하나씩 대응시키는 규칙을 나타내기때문이다.

**례 4** $y=3x^2+1$은 함수이다.

이때 규칙 $f$는 $x$의 매개 값에 그의 2제곱의 3배보다 1만큼 큰 $y$의 값을 하나씩 대응시키는것이다. 즉 $f(x)=3x^2+1$

함수 $y=f(x)$에서 $x=a$일 때 함수의 값 $f(a)$를 정할수 있으면 이 함수는 $x=a$에서 값을 가진다 또는 뜻을 가진다고 말한다.

이때 함수 $f(x)$는 $x$에서의 함수값을 나타내기도 하고 주어진 $x$의 값에 대응하는 함수값을 정하는 규칙을 나타내기도 한다.

**알아보기** 함수 $y=2x$와 $y=\dfrac{x^2}{x}$는 어디에서 뜻을 가지는가?

함수 $y=f(x)$가 값을 가지는 독립변수 $x$값전부의 모임을 이 함수의 뜻구역, 함수값전부의 모임을 이 함수의 값구역이라고 부른다.

**례 5** 함수 $f(x)=2x+1$의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

(풀이) $f(x)=2x+1$은 $x$의 모든 값에서 뜻을 가진다.

그러므로 함수의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$, 값구역은 $(-\infty,\ +\infty)$

## 문 제

1. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

   1) $y=3x-1$ 2) $y=\frac{x}{x+1}$

2. 다음 규칙이 함수라는것을 밝히고 그것의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

   1) $f(x)=0.25x-0.7$ 2) $g(x)=|x-0.3|$

3. 다음 물음에 대답하여라.

   1) 바른4각형의 한 변을 $x$cm, 그 둘레를 $y$cm로 표시할 때 $y$는 $x$의 함수인가?

   2) 반경이 $r$인 원의 둘레를 S로 표시할 때 S는 $r$의 함수인가?

### 2. 함수의 그라프

함수는 자리표평면에 찍은 점들의 모임으로 표시할수도 있다.

> 함수 $y=f(x)$의 독립변수의 값과 그것에 대응하는 종속변수의 값을 자리표로 가지는 점 전부의 모임 $\{(x, y)\}$을 그 함수의 그라프라고 부른다.

**례 1** $y=-\frac{3}{2}x+2$의 그라프는 함수 $f(x)=-\frac{3}{2}x+2$의 그라프와 같다.

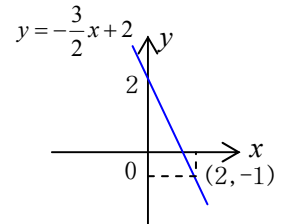



그림 8-1

**례 2** $y=x^2$의 그라프는 함수 $g(x)=x^2$의 그라프와 같다.

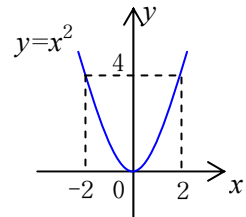



그림 8-2

## 문 제

1. 다음 함수의 그라프를 그려라.

   1) $y=0.5x$ 2) $y=-\frac{1}{2}x^2$

   3) $y=-0.5x-1$ 4) $y=3x^2$

2. 함수 $y=\frac{x}{|x|}$의 그라프를 그려라. 그리고 뜻구역과 값구역을 말하여라.

## 련 습 문 제

1. 다음 글에서 $y$가 $x$의 2차식으로 되는것은 (　　)이다.

   1) 반경이 $x$cm인 원의 면적은 $y$cm$^2$이다.

   2) 대각선의 길이가 $x$cm인 바른4각형의 면적은 $y$cm$^2$이다.

   3) 가로가 $a$cm, 세로가 $x$cm인 직4각형의 면적은 $y$cm$^2$이다.

2. 3각형의 밑변을 12cm, 높이를 $h$cm, 면적을 Scm$^2$로 표시할 때 S는 $h$의 함수인가? 뜻구역을 어떤 수모임으로 정할수 있는가?

3. 다음 규칙이 함수라는것을 밝히고 지적된 함수값을 구하여라.

   1) $f(t)=-5t+2$, 　　$f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{5})$

   2) $f(t)=8t+1$, 　　$f(-2)$, $f(0)$, $f(100)$

4. $f(x)=1-3x^2$일 때 $f(-2)=f(2)$, $f(-3)=f(3)$으로 되는가 따져보아라.

5. $f(x)=|0.5x|$일 때 $f$가 표시하는 규칙을 말하고 $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(100)$을 구하여라.

6. $x$를 독립변수로 하는 함수 $y=x^2$과 $y$를 독립변수로 하는 함수 $x=y^2$은 같다. 왜 그런가?

7. 다음 함수의 그라프를 그려라.

   1) $y=-\frac{1}{3}x+1$ 　　2) $y=\frac{1}{3}x^2$

8. 어떤 함수의 그라프가 그림 8−3과 같다.

   1) 매 점의 $x$자리표에 $y$자리표가 어떤 규칙에 따라 대응하는가?

   2) 이 규칙을 식으로 표시하여라.

   3) 이 함수의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

   4) 함수의 값이 5로 되는 $x$의 값모임을 구하여라. 또 함수의 값이 정수로 되는 $x$의 값모임을 구하여라.

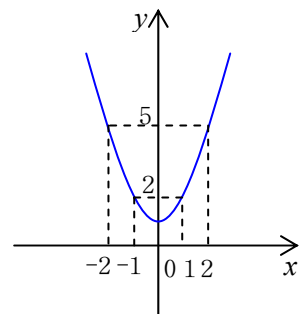



그림 8-3

## 제2절. 1차함수

### 1. 1차함수의 의미

독립변수에 관하여 1차식으로 표시되는 함수를 1차함수라고 부른다. 1차함수의 일반모양은 다음과 같다.

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

특히 $b=0$이면

$$y = ax$$

이것은 비례관계를 표시하는 가장 간단한 1차함수이다.
생활에서는 1차함수로 표시되는 현상들을 많이 볼수 있다.

**례 1** 처음 온도가 12℃인 물을 덥힌다. 매 분마다 물의 온도가 0.5℃씩 올라간다고 하면 $x$분후의 물의 온도 $y$는 다음 관계식으로 표시된다.

$$y = 0.5x + 12$$

즉 물의 온도 $y$는 시간 $x$의 1차함수이다.

**례 2** 쇠줄의 길이는 온도가 변하는데 따라 늘거나 준다. 온도가 0℃일 때 쇠줄의 길이가 10m였다. 온도가 1℃만큼 오르거나 내릴 때 쇠줄의 길이가 0.12mm만큼 늘거나 준다고 하면 온도가 $t$℃일 때 쇠줄의 길이 $\ell$은 다음 관계식으로 표시된다.

$$\ell = 10 + 0.00012t$$

즉 쇠줄의 길이 $\ell$은 온도 $t$의 1차함수이다.

### 문 제

1. 다음 식으로 주어진 함수들가운데서 1차함수를 찾아보아라.
   1) $y=-5x+1$　　2) $y=2(x+1)$　　3) $y=1-x^2$
   4) $y=\dfrac{2}{x-1}$　　5) $y=\dfrac{x}{5}$
2. 다음 1차함수의 뜻구역과 값구역을 구하여라.
   1) $y=x+3$　　2) $S=-1-t$
   3) $u=\dfrac{2}{3}v-0.5$　　4) $y=0.3x-0.1$
3. $y-2$가 $x-3$에 비례하며 $x$의 값 1에 대응하는 $y$의 값은 5이다.
   1) $y$는 $x$에 관한 어떤 식으로 표시되는가?
   2) $y$는 $x$의 1차함수인가?
4. 다음 글에서 $y$는 $x$의 1차함수인가?
   1) 반경이 $x$cm인 원둘레의 길이 $y$cm

2) 변의 길이가 $x$cm인 바른4각형의 면적 $y\text{cm}^2$

3) 한 뾰족각이 $x°$인 직3각형의 다른 뾰족각 $y°$

5. 한 통신원이 지점 A로부터 12km 떨어진 지점 B까지 4km/h의 속도로 갔다가 그 길로 돌아와야 한다. 이 통신원이 지점 A를 떠나 $x$시간후에 A로부터 $y$km 되는 지점을 지나게 된다.

1) 통신원이 지점 A로부터 B까지 갈 때 지나는 거리 $y$는 어떤 식으로 표시되는가? 또 $x$는 어떤 값을 잡을수 있는가?

2) 통신원이 지점 B에서 A로 돌아올 때 $y$는 어떤 식으로 표시되는가? 또 $x$는 어떤 값을 잡을수 있는가?

## 2. 1차함수의 그라프의 변화

1차함수 $y=ax+b$의 그라프가 $a$와 $b$의 값의 변화에 따라 어떻게 변하는가를 보자.

**알아보기** $y=0.5x+b$에서 $b$의 값을 $-2$, $-1$, 0, 1, 2와 같이 주면 그라프는 어떻게 되는가?

> 함수 $y=ax+b$의 그라프는 $b$가 커짐에 따라 $y$축의 정방향으로 평행이동한다.

**해보기** 함수 $y=2x+3$과 $y=-2x+3$의 그라프를 그리고 비교하여보아라.

$y=ax+b$의 그라프의 방향은 $a$의 값의 부호를 보고 판정할수 있다.(그림 8-4)

$a>0$이면 이 그라프는 오른쪽으로 감에 따라 우로 오르는 직선이고 $a<0$이면 아래로 내리는 직선이다.

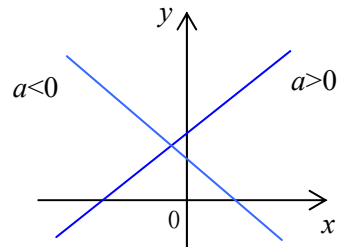



그림 8-4

**알아보기** $y=ax+2$에서 $a$의 값을 $-2$, $-1$, 0, 1, 2와 같이 변화시키면 그라프가 어떻게 움직이겠는가?

> 함수 $y=ax+b$의 그라프는 $a$의 값이 커짐에 따라 점 $(0, b)$를 중심으로 하여 시계바늘이 도는 방향과 반대방향으로 돈다.

$a$는 함수 $y=ax+b$가 표시하는 직선의 기울어진 정도 즉 방향을 정한다. 그러므로 결수 $a$를 **직선의 방향결수**라고 부른다.

례 1 함수 $y=0.9x-3$과 $y=0.9x+0.5$는 직선의 방향결수가 같다. 그러므로 이 두 함수의 그라프는 서로 평행인 직선이다.

## 문 제

다음 함수들의 방향결수를 말하여라. 어느 함수의 그라프가 서로 평행인가?

1) $y=-5x+2$, $y=0.5x+2$, $y=-5x-100$

2) $y=3-6x$, $y=3-60x$, $y=60-6x$, $y=x-6$

$y=ax+b$에서 $a$와 $b$의 값을 알면 이 함수의 그라프가 자리표평면에서 어디에 놓이는 직선인가를 쉽게 알수 있다.

례 2 함수 $y=3x+2$의 그라프가 어떤 직선인가를 말해보아라.

(풀이) 방향결수가 $a=3>0$이고 $b=2$이므로 이 함수의 그라프는 점 $(0, 2)$에서 $y$축과 사귀며 우로 오르는 직선이다.

## 문 제

1. 다음 함수의 그라프는 어떤 직선인가?

   1) $y=0.2x+1$　2) $y=-0.6x-2$　3) $y=-3x+2$

   4) $y=0 \cdot x+1$　5) $2y=-3x$

2. 함수 $y=ax+b$의 그라프는 $a$와 $b$의 값이 얼마일 때

   1) 함수 $y=7x-3$의 그라프와 일치하는가?

   2) 함수 $y=7x-3$의 그라프와 평행인가?

   3) 함수 $y=7x-3$의 그라프와 사귀는가?

3. 어떤 직선 $\ell$이 서로 다른 세 점 $A(a, b)$, $B(b, a)$, $C(a-b, b-a)$를 지난다면 직선 $\ell$은 (　)를 지난다.

   1) 2, 4사분구　2) 1, 2, 3사분구

   3) 2, 3, 4사분구　4) 1, 3, 4사분구

## 3. 1차함수값의 변화

### 1) 1차함수값의 증가와 감소

함수 $y=ax+b$의 그라프를 보면 그 함수의 값이 어떻게 변하는가를 알수 있다. 그림 8-5는 각각 함수 $y=2x+1$과 $y=-2x+1$의 그라프이다.

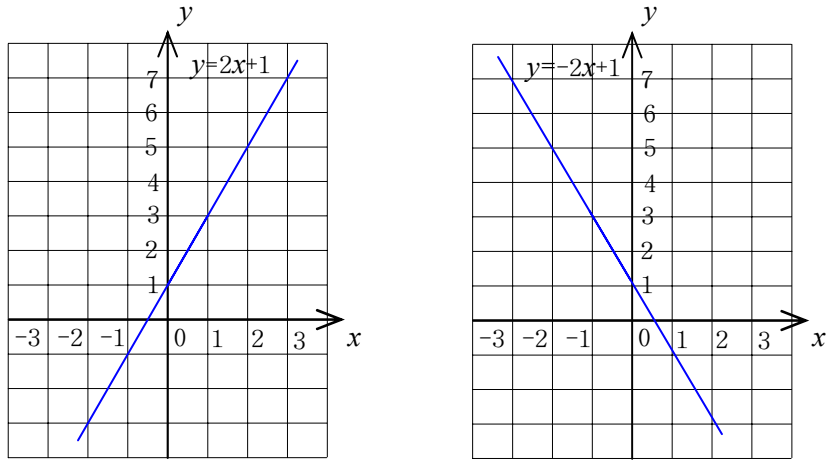



그림 8-5

**알아보기** 1. 함수 $y=2x+1$의 그라프를 보면서 다음 물음에 대답하여라.

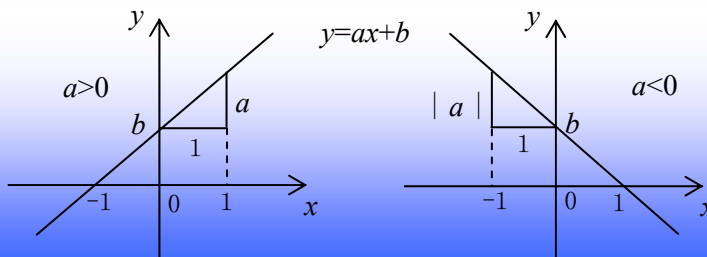
1) $x$가 1에서 3까지 2만큼 늘 때 함수값은 얼마나 변하는가?

2) $x$의 값이 늘면 함수값도 느는가?

2. 함수 $y=-2x+1$의 그라프를 보면서 우에서와 꼭 같은것을 알아보아라.

함수 $y=ax+b$에서

1) $a>0$일 때 독립변수 $x$의 값이 늘면 함수 $y$의 값도 는다.
이때 함수는 증가한다고 말한다.

2) $a<0$일 때 독립변수 $x$의 값이 늘면 함수 $y$의 값은 준다. 이때 함수는 감소한다고 말한다.

**례 1** 함수 $f(x)=16.9x-1.5$는 증가하는 함수인가, 감소하는 함수인가?
두 값 $f(37.87)$과 $f(46.29)$가운데서 어느것이 큰가?

(풀이) $a=16.9>0$이므로 함수 $f(x)=16.9x-1.5$는 증가하는 함수이다.
그리고 $37.87 < 46.29$이므로 $f(37.87)<f(46.29)$

### 문 제

1. 다음 함수들이 증가하는 함수인가, 감소하는 함수인가를 말하여라.

   1) $y=0.1x-100$  2) $y=1000-0.1x$  3) $y=3$

2. $f(x)=0.3x+1$일 때 두 값 $f(7)$과 $f(11)$가운데서 어느것이 큰가?
3. $g(x)=-5678x+456$일 때 두 값 $g(256)$과 $g(-372)$가운데서 어느것이 큰가?

### 2) 1차함수의 변화비

함수 $f(x)=3x-1$에서 독립변수 $x$가 1에서 2만큼 늘 때 함수 $f(x)$의 값은 $f(1)=3\cdot1-1=2$에서 $f(3)=3\cdot3-1=8$까지 즉 $f(3)-f(1)=8-2=6$만큼 는다.

독립변수의 변화량에 대한 함수의 변화량의 비의 값은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

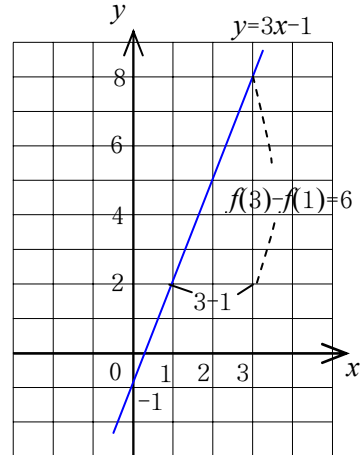



그림 8-6

**알아보기** 함수 $f(x)=3x-1$에서 독립변수 $x$가 $-4$에서 $-1$까지 늘 때 우에서와 같이 변화량들의 비의 값을 구하여라.

또한 독립변수 $x$가 1에서 2까지 늘 때 변화량들의 비의 값들이 어떤가?

함수 $y=ax+b$에서 독립변수의 변화량에 대한 함수의 변화량의 비를 1차함수의 변화비라고 부른다. 즉

$$\frac{\text{함수의 변화량}}{\text{독립변수의 변화량}}=\text{변화비}$$

1차함수 $y=ax+b$의 변화비는 일정하고 그것은 방향곁수 $a$와 같다.

변화비가 정수일 때 그것이 클수록 함수는 빨리 증가한다.

**알아보기** 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 변화비가 각각 $-2$와 $-3$이라고 하면 이것은 무엇을 의미하는가? 어느 함수가 보다 빨리 변하는가?

변화비가 부수일 때 그것이 작을수록 함수는 빨리 감소한다.

**례 2** 독립변수의 값이 3만큼 늘 때 함수 $y=2-7x$의 값은 얼마나 변하는가?

(풀이) 변화비가 $a=-7$이므로 함수 $y=2-7x$는 독립변수 $x$가 1만큼 늘 때 함수값이 7만큼 감소한다. 따라서 독립변수의 값이 3만큼 늘 때 $(-7)\cdot 3=-21$ 즉 함수값이 21만큼 감소한다.

### 문 제

1. 다음 함수의 변화비를 말하여라. 독립변수 $x$의 값이 2만큼 늘 때 함수값이 얼마나 변하는가?

   1) $y=5x-1$　　2) $y=3-4x$　　3) $y=0.1x+10$

2. 다음 조건에 맞는 1차함수를 구하여라.

   1) $x=3$일 때 $y=-1$이고 변화비가 $\frac{1}{3}$

   2) $x=-2$일 때 $y=12$이고 변화비가 $-5$

   3) $x=2$일 때 $y=4$이고 $x=6$일 때 $y=8$

3. 그라프가 다음 직선과 같은 1차함수를 구하여라.

   1) 방향결수가 2이고 점 $(2, 4)$를 지나는 직선

   2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 평행이고 점 $(-2, 2)$를 지나는 직선

   3) 점 $(2, 1)$을 지나면서 $x$축과 $45°$의 각을 이루며 오른쪽으로 가면서 우로 오르는 직선

## 련 습 문 제

1. 다음 함수가운데서 1차함수를 말하여라.

   1) $y=\frac{2}{3x}+5$　　2) $y=1-x^2$　　3) $y=0\cdot x+4$

   4) $y=1$　　5) $y=3x-0.7$

2. 다음 글에서 $y$를 $x$의 식으로 표시하고 그것이 1차함수인가를 말하여라.

   1) $x$에 5를 곱하고 거기에 3을 더하면 $y$가 된다.

2) $x$를 2제곱하고 거기에서 1을 덜면 $y$가 된다.

3) 탄창 하나에 탄알이 $m$개 들어있다. 탄창 $x$개에 들어있는 탄알의 총수는 $y$개이다.

3. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=2.5x+3$ 2) $y=-2x+3$ 3) $y=-4x-1$

4. 3번문제에서 그린 함수의 그라프를 보고 다음 물음에 대답하여라.

1) 함수값이 0으로 되는 $x$의 값은 얼마인가?

2) 함수값이 정수인 $x$의 구간을 구하여라.

3) 함수값이 $-5$보다 작아지는 $x$의 구간을 구하여라.

4) $x$의 값이 늘면 함수 $y$의 값이 어떻게 변하는가?

5. 관계식 $S=\frac{t}{2}+6$에 따라서 직선운동하는 물체가 있다. 경로의 그라프를 그려라. 이 그라프를 보고 시간 $t$가 2에서 4까지 변할 때 S가 얼마나 변하는가를 말하여라.

6. 그라프를 그리지 말고 다음 점들이 함수 $y=-3x+5$의 그라프의 점인가 아닌가를 말하여라.

$$(3,\ -4),\ (1.8,\ -0.4),\ (0,\ 3),\ (\frac{1}{3},\ 4),\ (\frac{1}{2},\ 6)$$

7. 함수 $y=ax+2$의 그라프가 점 (2, 10)을 지난다. $a$의 값을 구하여라.

8. 함수 $y=-4x+b$의 그라프가 점 (−6, 12)를 지난다. $b$의 값을 구하여라.

9. 두 함수 $f(x)=3-x$와 $g(x)=4x+1$의 그라프를 그리고 다음 물음에 대답하여라.

1) $x=2$에서 두 함수의 값을 구하여라. 어느것이 큰가?

2) 두 함수의 값이 같아지는 $x$의 값을 구하여라.

3) $f$의 값이 $g$의 값보다 커지는 $x$의 값을 구하여라.

4) $g$의 값이 $f$의 값보다 커지는 $x$의 값을 구하여라.

10. 위대한 령도자 **김정일**대원수님께서 책을 많이 읽을데 대하여 주신 유훈을 높이 받들고 영남이는 혁명소설을 읽고있다. 이미 120페지를 읽었다. 이제 하루에 25페지씩 $x$일 읽으면 모두 $y$페지를 읽게 된다. $y$는 $x$의 1차함수인가?

11. 땅으로부터 15km 높이까지의 범위에서 대기의 온도는 100m 올라가는데 따라 0.6℃씩 낮아진다고 한다. 땅우의 기온이 18℃일 때 땅으로부터 $x$km 높이의 기온이 $y$℃이다. $y$가 $x$의 1차함수인가? 그라프를 그려라.

12. 함수 $y=-x+2$의 그라프를 [−4, 4]에서 그려라.

13. 함수 $y=-0.5x+1$의 그라프를 구간 [100, 350]에서 그려라.

14. 다음 함수들의 방향결수와 그것의 그라프가 $y$축과 사귀는 점의 자리표를 말하여라.

1) $y=x-2$, $y=x$, $y=x+3$

2) $y=-0.4x$, $y=-0.4x+2$, $y=-0.4x-3$

1)과 2)의 그라프들은 각각 서로 어떻게 놓이는가?

15. 다음 함수는 증가함수인가, 감소함수인가?

1) $y=2360x-3708$ 2) $y=-3\cdot10^3x$ 3) $y=-0.001x+0.0001$

16. 독립변수의 어느 값에 대응하는 함수값이 더 큰가?

1) $y=\frac{3}{4}x-5\left(x=237\frac{83}{107},\ x=47\frac{4}{5}\right)$

2) $y=\frac{7}{10}-0.051x\,(x=-87.561,\ x=-89.183)$

17. 독립변수의 값이 5만큼, 8.2만큼 변할 때 함수값은 얼마나 변하겠는가?

1) $y=2x-3$ 2) $S=5-\frac{1}{2}t$ 3) $u=0.25v+4$ 4) $3x+4y=-\frac{1}{2}$

18. 다음 조건에 맞는 1차함수를 구하여라.

1) $x=2$일 때 $y=-2$이고 변화비가 $\frac{3}{2}$

2) $x=1.5$일 때 $y=\frac{1}{2}$이고 변화비가 $-\frac{1}{3}$

3) $x=3$일 때 $y=1$이고 $x$의 값이 3만큼 증가할 때 $y$는 2만큼 감소한다.

19. 어떤 1차함수의 독립변수 $x$가 구간 $[-5, 2]$에서 변할 때 종속변수 $y$는 구간 $[-32, 3]$에서 변한다. 이 함수를 구하여라.

20. 함수 $y=ax+b$의 그라프가 $y$축에 관해서 직선 $y=4x-1$에 대칭이다. $a$, $b$의 값을 구하여라.

21. 그림 8-7과 같은 직4각형 ABCD의 변을 따라 점 M이 점 A를 떠나 점 B, C를 거쳐 점 D로 온다고 하자. 점 M이 A로부터 $x$ cm만큼 움직여갔을 때 3각형 MAD의 면적을 $y\text{cm}^2$라고 하면 $y$를 $x$의 식으로 표시하고 그것의 그라프를 그려라.

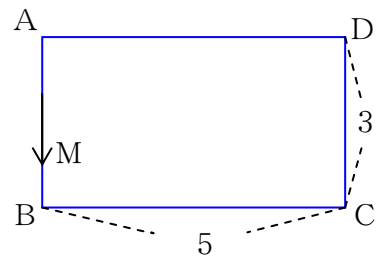



그림 8-7

## 제3절. 2차함수

### 1. 2차함수의 의미

**알아보기** 다음 식으로 주어진 함수에서 독립변수의 2차식으로 표시된 함수를 가려내여라.

$$y=-2x^2,\quad y=0.4x^2+0.01,\quad v=\frac{2}{t^2}-t+1,$$

$$u=2v^2-v+\frac{3}{4},\quad 2y=\frac{3}{5}x^3+x^2+2,\quad 2u=\frac{v^2-2v}{3}+5$$

독립변수에 관하여 2차식으로 표시되는 함수를 2차함수라고 부른다. 2차함수의 일반모양은 다음과 같다.

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

$a=1$, $b=0$, $c=0$이면 $y=x^2$도 2차함수이다. 이것은 2차함수의 간단한 실례이다.

생활에서는 2차함수로 표시되는 현상을 많이 볼수 있다.

**례 1** 처음속도 30m/s로 우로 던진 물체가 $t$초동안에 올라간 높이를 $h$m라고 하면 $h$는 대략 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$h=30t-5t^2$$

이때 올라간 높이 $h$는 시간 $t$의 2차함수이다.

**례 2** 반경이 $r$cm인 원의 면적을 Scm$^2$라고 하면

$$S=\pi r^2$$

즉 면적 S는 반경 $r$의 2차함수이다.

### 문 제

1. 다음 식으로 주어진 함수들가운데서 2차함수를 골라내여라.

1) $y=3x^2-5$  2) $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{x}-2$

3) $y=\frac{2}{(4-x)^2}+6$  4) $S=(3-2t)^2+3t-1$

2. 다음 글에서 $y$는 $x$의 2차함수인가?

1) 반경이 $x$ cm인 원둘레의 길이는 $y$ cm이다.

2) 한 변이 $x$ cm인 바른4각형을 밑면으로 하고 높이가 7cm인 직6면체의 체적은 $y\,\text{cm}^3$이다.

3) 반경이 $x$ cm인 구의 걸면적은 $y\,\text{cm}^2$이다.

## 2. 2차함수의 그라프의 변환

### 1) $y=ax^2$의 그라프

**알아보기** 1) $x$의 값이 2일 때 $x^2$과 $2x^2$의 값을 비교하여라. 또 $x$의 값이 $-3$, $-1$일 때는 어떤가?

2) $y=x^2$과 $y=2x^2$의 그라프에서 $x$의 자리표가 다같이 2인 점들의 $y$자리표사이에는 어떤 관계가 있겠는가?

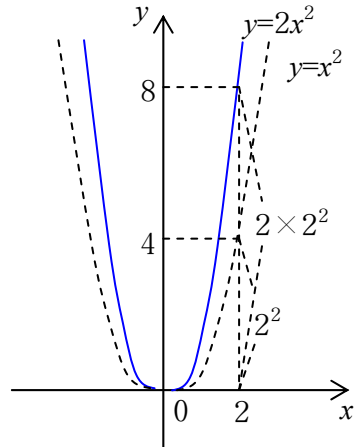



그림 8-8

$x$의 같은 값에 대응하는 $y=2x^2$의 값은 $y=x^2$의 값의 2배이다.

그러므로 $y=2x^2$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프의 매개 점의 $y$자리표를 2배 해서 얻은 점들로 이루어진다.(그림 8−8)

**해보기** 1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프를 써서 어떻게 그릴수 있겠는가?

2) 점 A(2, 3)과 B($a$, $b$)는 $x$축에 관하여 서로 대칭이다. $a$, $b$의 값은 각각 얼마인가?(그림 8−9)

3) $x$의 같은 값에 대하여 함수 $y=2x^2$과 $y=-2x^2$의 값을 비교하여보아라. 무엇을 알수 있는가?

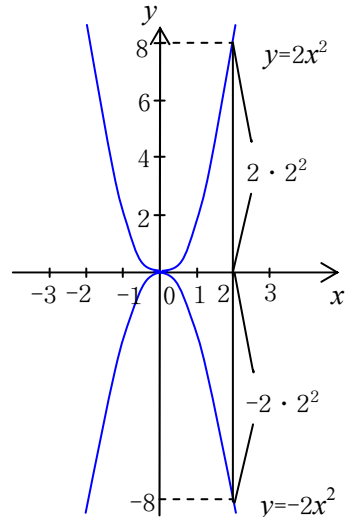



그림 8-9

$x$의 같은 값에 대하여 $y=-2x^2$의 값은 $y=2x^2$의 값과 절대값이 같고 부호만 다르다.

그러므로 $y=2x^2$과 $y=-2x^2$의 그라프는 $x$축에 관하여 서로 대칭이다.(그림 8-9)

**$y=ax^2(a>0)$의 그라프**

$a>0$일 때 $y=x^2$의 그라프를 $y$ 축방향으로 $a$ 배하면 $y=ax^2$의 그라프가 된다.

$a>0$일 때 $y=ax^2$과 $y=-ax^2$의 그라프는 $x$축에 관하여 서로 대칭이다.

문 제

1. $y=x^2$의 그라프를 써서 다음 함수의 그라프를 그려라.

   1) $y=3x^2$  2) $y=0.5x^2$  3) $y=\frac{1}{3}x^2$

2. $y=\frac{1}{2}x^2$의 그라프는 $y=2x^2$의 그라프보다 더 벌어진다. 왜 그런가?

3. $0<a<b$일 때 함수 $y=ax^2$과 $y=bx^2$의 그라프가운데서 어느것이 더 벌어지겠는가? 어느것이 더 오무라지겠는가?

4. $y=\frac{1}{2}x^2$의 그라프를 써서 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그라프를 그려라.

5. $y=3x^2$의 그라프를 써서 $y=-3x^2$의 그라프를 그려라.

6. $y=-\frac{1}{3}x^2$과 $y=-3x^2$의 그라프모양을 비교하여보아라. 무엇을 알수 있는가?

함수 $y=ax^2$의 그라프의 성질을 묶어보면 다음과 같다.

**$y=ax^2$의 그라프의 성질**

1) 그라프는 늘 원점을 지난다.
2) 그라프는 $y$축에 관하여 대칭이다.
3) $a>0$이면 그라프는 $x$축의 웃쪽 반평면에 놓이며 우로 벌어진다. $a<0$이면 그라프는 $x$축의 아래쪽 반평면에 놓이며 아래로 벌어진다.
4) $|a|$가 클수록 그라프는 오무라지고 작을수록 벌어진다.

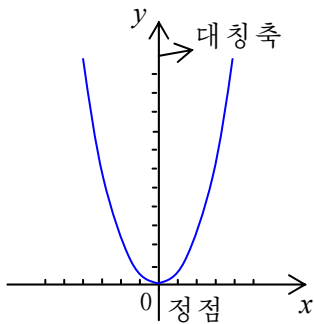
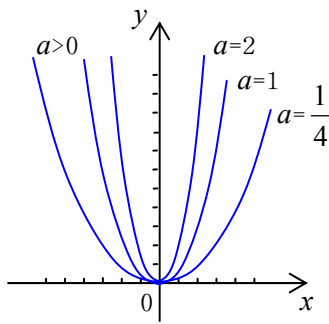
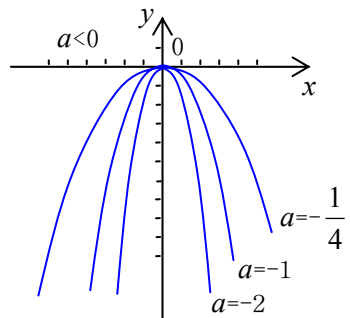



그림 8－10　　　그림 8－11　　　그림 8－12

함수 $y=ax^2(a\neq 0)$ 의 그라프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 부른다.
$y=ax^2$ 의 그라프에서 $y$ 축을 **대칭축**, 대칭축과의 사귐점을 **정점**이라고 부른다.

## 문 제

1. 다음 함수의 그라프는 어느쪽으로 벌어졌는가? 또 가장 크게 벌어진것, 가장 좁게 오무라진것은 어느것인가?

   1) $y=0.3x^2$　　2) $y=-7.4x^2$　　3) $y=-\dfrac{1}{5}x^2$

2. 함수 $y=ax^2$ 의 그라프가 점 (－2, 1)을 지난다. $a$ 의 값을 구하여라.
3. 다음 함수의 그라프를 한 자리표평면에 그리고 사귐점들의 자리표를 구하여라.

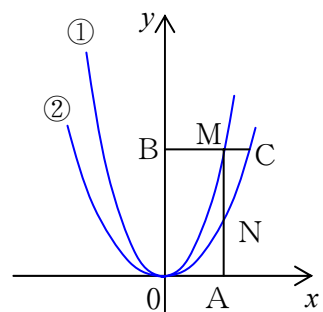
   1) $y=x^2$ 과 $y=-x^2$　　2) $y=x^2$ 과 $y=x$　　3) $y=x^2$ 과 $y=2x-1$

4. 그림 8－13에 있는 포물선 ①과 ②는 함수 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ 과 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 의 그라프이다.

   ①의 점 $M\left(a,\ \dfrac{3}{4}a^2\right)$ 을 지나 $y$ 축에 평행인 직선을 긋고 $x$ 축과의 사귐점을 A, 포물선 ②와의 사귐점을 N이라고 한다. 또 점 M을 지나 $x$ 축에 평행인 직선을 긋고 $y$ 축과의 사귐점을 B, 포물선 ②와의 사귐점을 C라고 한다.

그림 8－13

   1) AM:AN을 구하여라.

   2) $a=2$ 일 때 BM:BC를 구하여라.

### 2) $y=ax^2+n$의 그라프

**해보기** 함수 $y=2x^2$과 $y=2x^2+3$에 대하여

1) 독립변수의 같은 값에 대응하는 함수값들사이에는 어떤 관계가 있는가?
2) $y=2x^2$의 그라프로부터 $y=2x^2+3$의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하는가?

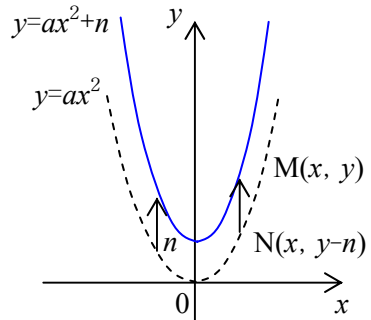



그림 8-14

**$y=ax^2+n$ 의 그라프**

함수 $y=ax^2$의 그라프를 $y$축의 정방향으로 $n$만큼($n>0$이면 우로, $n<0$이면 아래로) 평행이동하면 $y=ax^2+n$의 그라프가 얻어진다.

문 제

1. 함수 $y=3x^2$의 그라프로부터 $y=3x^2-1$의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하는가?
2. 함수 $y=x^2$의 그라프를 써서 $y=-2x^2-3$의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하는가?
3. $y=x^2$의 그라프를 그림 8-15와 같이 이동하였다. ①, ②, ③은 각각 어떤 함수의 그라프와 같은가?

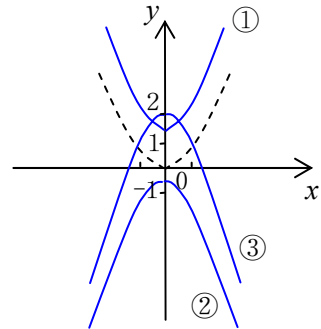



그림 8-15

4. $y=\frac{3}{4}x^2$ 의 그라프로부터 다음 함수들의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하겠는가? 매 정점의 자리표를 구하여라.

1) $y=-\frac{3}{4}x^2-25$　　2) $y=3x^2-1.5$

3) $y=-\frac{3}{2}x^2+1\frac{1}{4}$　　4) $y=6x^2-7$

5. $y=ax^2+n$의 그라프가 두 점 $(0,\ -5)$, $(-6,\ 7)$을 지난다. $a$와 $n$의 값을 구하여라.
6. 다음 두 함수의 그라프를 한자리표평면에 그리고 그 사귐점의 개수를 말하여라.

1) $y=2x^2$과 $y=x+1$　　2) $y=2x^2$과 $y=4-2x^2$

### 3) $y=a(x-m)^2$의 그라프

**알아보기** 두 함수 $y=2x^2$과 $y=2(x-2)^2$에 대하여

1) 독립변수 $x$의 값에 대응하는 두 함수값을 각각 표에 써넣어라.

| $x$ | … | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2x^2$ | | | | 2 | | | | | |
| $y=2(x-2)^2$ | | | | 18 | | | | | |

2) 표를 보고 $y=2(x-2)^2$의 그라프를 그려라.

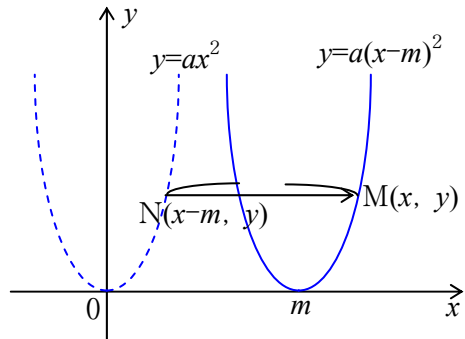
3) 두 함수의 그라프에서 $y$자리표가 같은 점들의 $x$자리표사이에 어떤 관계가 있는가를 말하여라.

4) $y=2x^2$의 그라프로부터 $y=2(x-2)^2$의 그라프를 어떻게 얻을 수 있는가?

**$y=a(x-m)^2$의 그라프**

$y=ax^2$의 그라프를 $x$축의 정방향으로 $m$만큼($m>0$이면 오른쪽으로, $m<0$이면 왼쪽으로) 평행이동하면 $y=a(x-m)^2$의 그라프가 얻어진다.

그림 8−16

## 문 제

1. $y=3x^2$의 그라프로부터 $y=3(x+2)^2$의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하는가?
2. $y=4x^2$의 그라프로부터 $y=-4(x-3)^2$의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하는가?
3. 다음 함수의 그라프를 그리지 말고 그의 정점의 자리표를 구하여라.

   1) $y=x^2-2x+1$　　2) $y=\frac{1}{2}(x-7)^2$

   3) $y=-5(x+3)^2$　　4) $y=-\frac{3}{4}x^2+3x-3$

4. 다음 함수의 그라프를 $x$축의 정방향으로 $-2$만큼 평행이동하면 어떤 함수의 그라프가 나오는가?

   1) $y=7x^2$　　2) $y=-4x^2$

4) $y=a(x-m)^2+n$의 그라프

알아보기 함수 $y=3x^2$의 그라프를 그림 8−17과 같이 평행이동하면 어떤 함수의 그라프가 나오는가?

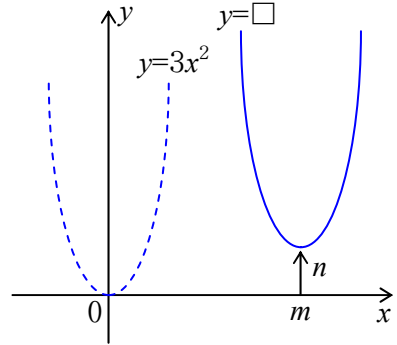



그림 8−17

**$y=a(x-m)^2+n$ 의 그라프**

$y=ax^2$의 그라프를 $x$축의 정방향으로 $m$만큼 평행이동한 다음 련이어 $y$축의 정방향으로 $n$만큼 평행이동하면 $y=a(x-m)^2+n$의 그라프가 나온다.

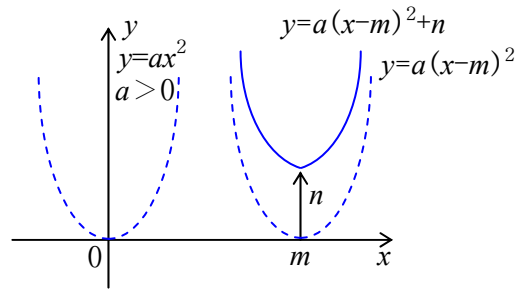



그림 8−18

문 제

1. 함수 $y=\frac{3}{4}x^2$의 그라프를 $x$축의 정방향으로 −2만큼 평행이동한 다음 계속하여 $y$축의 정방향으로 3만큼 평행이동하면 어떤 함수의 그라프가 나오는가?
2. $y=3x^2$의 그라프로부터 다음 함수들의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하겠는가?

   1) $y=3(x-2)^2+2$  2) $y=3(x+5)^2-1$  3) $y=-3(x+3)^2+7$

3. $y=\frac{1}{2}(x-7)^2+n$의 그라프가 점 (5, 6)을 지난다. $n$의 값을 구하여라.
4. $y=a(x-3)^2+n$의 그라프가 점 (3, 5), (1, 17)을 지난다. 이 함수를 구하여라.
5. 어떤 포물선이 그림 8−19와 같이 주어졌다. 이 함수를 구하여라.

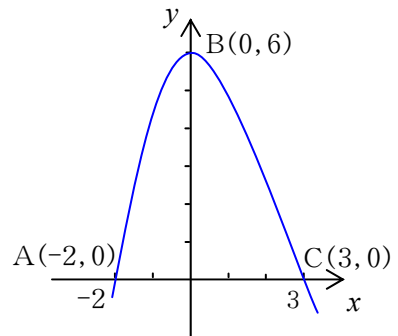



그림 8-19

**해보기** 2차함수 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 의 그라프는 $y=ax^2$

의 그라프로부터 얻을수 있다.

그림을 보고 그 방법을 설명하여라.

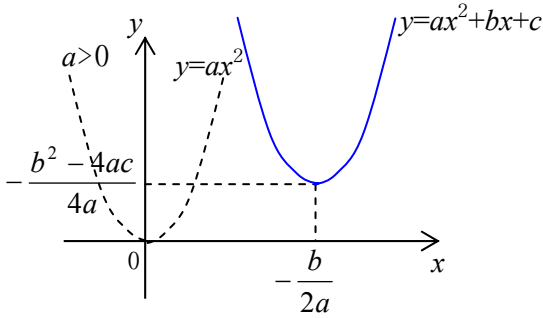
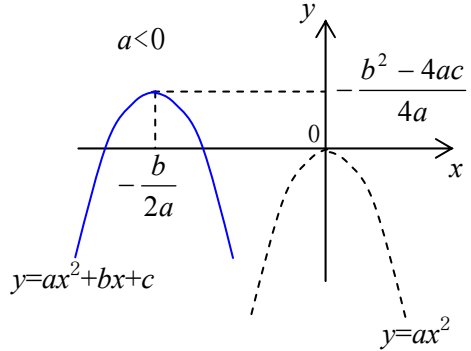



그림 8−20　　　　　　　　　　그림 8−21

$b^2-4ac=\mathrm{D}$ 로 표시하면

$$y=ax^2+bx+c=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\frac{\mathrm{D}}{4a}$$

그러므로 $y=ax^2$ 의 그라프를 $x$ 축의 정방향으로 $-\frac{b}{2a}$ 만큼 평행이동한 다음 련이어 $y$ 축의 정방향으로 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$ 만큼 평행이동하면 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프가 얻어진다. 이로부터 $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 $y=ax^2$의 그라프와 같은 곡선 즉 포물선이라는것을 알수 있다.

이때 정점의 자리표는 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\mathrm{D}}{4a}\right)$이다.

> **$y=ax^2+bx+c$ 의 그라프**
>
> 2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 점 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\mathrm{D}}{4a}\right)$ 를 정점으로 가지는 포물선이다.
>
> $a>0$ 이면 우로 벌어지고 $a<0$ 이면 아래로 벌어진다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그라프는 $f(0)=c$ 이므로 점 $(0,\ c)$에서 $y$ 축과 사귄다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 그리지 말고 그것의 정점을 말하여라. 또 그라프의 가지가 벌어진 방향을 말하여라.

1) $y = x^2 - 6x + 1$　　2) $y = 3x + x^2$

3) $y = -2x^2 + 7x$　　4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$

2. 함수 $y = 2x^2 + 3x - 2$ 의 그라프로부터 함수 $y = -2x^2 + 3x + 1$ 의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하겠는가?

### 3. 2차함수의 최대값과 최소값

**알아보기** 다음의 그라프를 보고 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 값이 어느 구간에서 증가하고 어느 구간에서 감소하는가 말하여라. 또 함수의 최대값 또는 최소값을 구하여라.

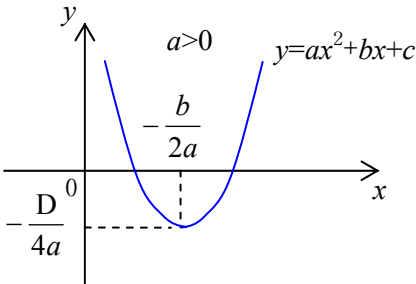



그림 8−22

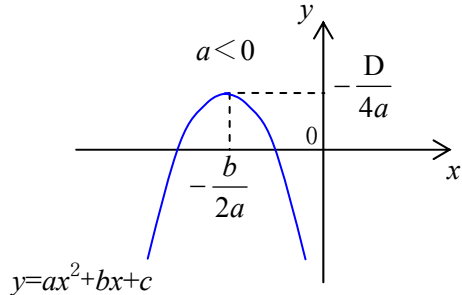



그림 8−23

$a > 0$ 일 때

$$f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 - \frac{D}{4a} \geq -\frac{D}{4a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}$$

따라서 $a > 0$ 일 때 $f(x)$ 의 값은 늘 $-\frac{D}{4a}$ 보다 작지 않으며 $x = -\frac{b}{2a}$ 에서 최소값 $-\frac{D}{4a}$ 를 가진다.

$a < 0$ 일 때 $f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 - \frac{D}{4a} \leq -\frac{D}{4a}$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\mathrm{D}}{4a}$$

따라서 $a<0$일 때 $f(x)$의 값은 늘 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$보다 크지 않으며 $x=-\frac{b}{2a}$에서 최대값 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$를 가진다.

> 2차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 값은
>
> $a>0$일 때 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$에서 감소하고 $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$에서 증가한다.
>
> $a<0$일 때 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$에서 증가하고 $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$에서 감소한다.

함수값이 증가하는 구간, 감소하는 구간을 각각 그 함수의 **증가구간**, **감소구간**이라고 부른다.

**례 1** 함수 $f(x)=2x^2-4x-1$의 최대값 또는 최소값을 구하여라. 어느 구간에서 감소하고 어느 구간에서 증가하는가? 이 함수의 그라프를 대략 그려라.

(풀이) $a=2>0$이므로 이 2차함수의 그라프는 우로 벌어진 포물선이다. 따라서 최소값을 가진다.

$$f(x)=2x^2-4x-1=2\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\left(x^2-2x+1^2-1^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\left[(x-1)^2-\frac{3}{2}\right]=2(x-1)^2-3\geq-3$$

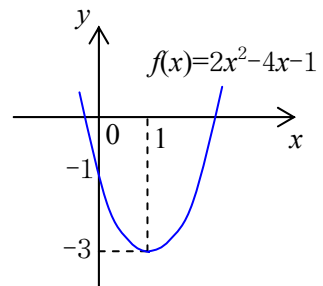
이로부터 $f(x)$는 $x=1$에서 최소값 $-3$을 가진다.

그림 8－24

또 $f(0)=-1$이므로 $f(x)$의 그라프는 점

(0, －1)에서 $y$축과 사귀며 점 (1, －3)을 정점으로 하는 포물선이다.

그라프를 대략 그리면 그림 8－24와 같다.

그라프를 보면 함수는 (－∞, 1)에서 감소하고 (1, ＋∞)에서 증가한다.

례 2 1 000m고지에서 40m/s의 속도로 올려 던진 물건이 $t$초 지났을 때 $y$ m의 높이에 이른다고 하면 $y$는 대략 $y=-5t^2+40t+1000$과 같이 표시된다. 이 물건이 가장 높이 올라갔을 때는 어느때이고 그때의 높이는 얼마인가?

(풀이) 함수 $y=-5t^2+40t+1000$의 최대값을 구하는 문제이다.

$$y=-5t^2+40t+1000=-5(t^2-8t-200)=-5(t^2-8t+4^2-4^2-200)$$
$$=-5[(t-4)^2-216]=-5(t-4)^2+1080\le 1080$$

그러므로 이 함수는 $t=4$일 때 최대값 1 080을 가진다.

즉 대략 4초 지났을 때 가장 높이 올라가며 이때 높이는 1 080m이다.

## 문 제

1. 다음 함수들의 최대값 또는 최소값과 증가구간, 감소구간을 구하고 그라프를 대략 그려라.

   1) $f(x)=-x^2-4x+1$　　2) $f(x)=2x^2-x-3$　　3) $y=3x^2-10x+100$

2. 대칭축이 $x=2$이고 두 점 (1, −1), (−1, 23)을 지나는 포물선은 어떤 함수의 그라프인가? 그 함수를 구하여라.

3. 대칭축이 $y$축에 평행이고 세 점 (0, 8), (1, 2), (2, 4)를 지나는 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

4. 다음 그림들과 같은 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

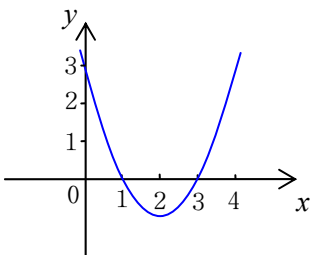



그림 8−25

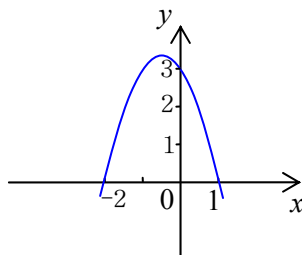



그림 8−26

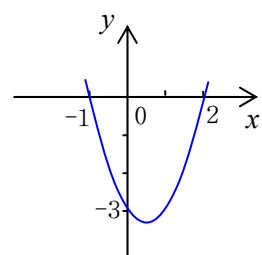



그림 8−27

5. $x$의 아무런 값에 대해서나 다음 안갈기식이 성립한다는것을 밝혀라.

   1) $y=2x^2-5x+4\ge\frac{7}{8}$　　2) $y=4x-5x^2\le\frac{4}{5}$

6. 다음 함수의 증가구간, 감소구간, 최대값 또는 최소값을 구하여라. 그리고 함수의 그라프를 대략 그려라.

1) $y=(x+2)(4-x)$ 2) $y=-x^2+6x-10$

3) $y=\frac{1}{2}x^2-4x-6$ 4) $y=2-6x-3x^2$

7. 함수 $y=3x^2+4ax+b$ 는 $x=2$일 때 최소값이 7이다. $a$, $b$ 의 값을 구하여라.
8. 길이가 40cm인 쇠줄로 면적이 가장 큰 직4각형을 만들자면 어떻게 해야 하겠는가? 그 면적은 얼마인가?
9. 어떤 2차함수의 최소값은 －5이고 그라프는 두 점 (－1, 1), (0, 1)을 지난다. 그 함수를 구하여라.

## 련 습 문 제

1. 다음 문장가운데서 옳은것은 (  )이다.
   1) 2차함수의 그라프는 $a$가 클수록 오무라진다.
   2) 2차함수의 그라프는 반드시 $y$축에 평행인 대칭축을 한개 가지게 된다.
   3) 2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 $a$, $b$, $c$에 따라 모양이 달라진다.
   4) 2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프의 위치는 결수 $b$, $c$에 관계된다.
2. 다음 함수의 그라프는 어느쪽으로 벌어진 포물선인가? 그것의 정점, 대칭축과의 사귐점의 자리표를 각각 구하여라.

   1) $y=0.25x^2$ 2) $s=-\frac{1}{3}t^2$ 3) $y=1.01x^2-3$ 4) $u=-0.2v^2-2.7$

3. 함수 $y=x^2-bx-6$ 의 그라프가 점 (4, 16)을 지난다. $b$ 의 값을 구하여라.
4. 2차함수 $y=2x^2$ 에서
   1) $x$ 가 1에서 3까지 2만큼 변할 때 $y$ 의 값은 얼마만큼 변하는가?
   2) $x$ 가 －2에서 0까지, －5에서 3까지 변할 때 변화비를 각각 구하고 비교하여라.
5. 대칭축이 $x=3$ 이고 두 점 (2, 12), (10, 348)을 지나는 포물선은 어떤 함수의 그라프인가? 그 함수를 구하여라.
6. $y=x^2$ 의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 어떻게 얻을수 있는가?

   1) $y=x^2+3$ 2) $y=\frac{1}{2}(x-0.5)^2$ 3) $y=\frac{1}{2}(x+2.5)^2+3$

4) $y=x^2+0.16x-0.009$  5) $y=3x^2+12x+9$  6) $y=20+8x-2x^2$

7. 다음 함수의 그라프를 대략 그리고 증가구간, 감소구간, 최대값, 최소값을 각각 구하여라.

1) $y=(x+2)^2-3$  2) $y=-(x-4)^2+1$

3) $y=2x^2-6x+1$  4) $S=0.5t^2-0.1t+0.01$

8. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=|x^2-2|$  2) $y=-|1-x^2|$  3) $y=|x^2+4x+3|$

9. 두 함수 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 와 $y=x^2-3x$ 의 그라프는 같은 정점을 가진다. $b$와 $c$의 값을 구하여라.

10. 2를 최소값으로 가지는 2차함수 $y=x^2+bx+c$의 그라프를 $y$축의 정방향으로 $-2$만큼 평행이동한 다음 련이어 $x$축의 정방향으로 3만큼 평행이동하였더니 정점이 점 (1, 0)에 왔다. $b$, $c$의 값을 구하여라.

11. $|y|\le 1$이고 $2x+y=1$이면 $2x^2+16x+3y^2$의 최소값은 (  )이다.

1) $\frac{19}{7}$  2) 3  3) $\frac{27}{7}$  4) 13

12. $y=2x^2+3bx+2b$ 의 최소값을 $z$ 라고 한다. $b$ 가 어떤 값을 가질 때 $z$ 가 최대로 되겠는가?

13. 대칭축이 $y$ 축에 평행이고 정점이 (2, −3)인 포물선이 점 (0, 1)을 지난다. 이 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

14. 다음 그림들과 같은 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

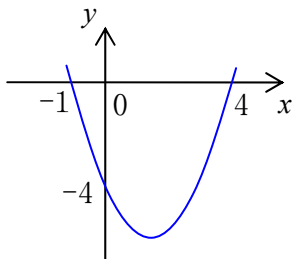



그림 8−28

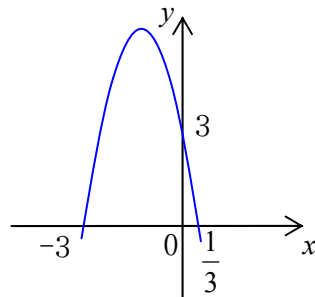



그림 8−29

15. 직각변들의 길이의 합이 $a$인 직3각형에서 직각변들의 길이를 각각 어떻게 잡아야 그 면적이 최대로 되겠는가? 또 빗변의 길이가 최소로 되겠는가?

## 복 습 문 제

1. 다음 함수들의 그라프를 그리고 두 그라프들이 서로 어떤 자리관계에 있는가를 말하여라.

   1) $y=x$와 $y=-x$　　2) $y=3x$와 $y=3x-2$　　3) $y=0.5x$와 $y=0.5x-2$

2. 함수 $y=x-3$의 그라프를 그려라. 그것이 함수 $y=x$의 그라프와 어떤 자리관계에 있는가? 또한 다음의 수모임을 구하여라.

   1) $\{x|\, y=0\}$　　2) $\{x|\, y>0\}$　　3) $\{x|\, y<0\}$

3. 함수 $y=3-x$의 그라프를 그려라. 이 그라프는 함수 $y=-x$의 그라프와 어떤 자리관계에 있는가? 다음 값들의 모임을 구하여라.

   1) $\{x|\, y=0\}$　　2) $\{x|\, y>0\}$　　3) $\{x|\, y<0\}$

4. 독립변수 $x$가 $[2,\ 5]$에서 변할 때 다음 함수들의 함수값은 어느 구간에서 변하는가?

   1) $y=1.2x$　　2) $y=1.2x+0.5$

   3) $y=2.4-2x$　　4) $y=-4.2-2x$

5. 함수 $y=4x-1$의 그라프를 그려라. 그리고 다음 값을 구하여라.

   1) $\{x|\, y>0\}$　　2) $\{x|\, y<0\}$　　3) $\{x\, |y>3\}$

6. 함수 $f$가 $(-\infty,\ +\infty)$에서 다음과 같이 주어졌다.

   $x\in(-\infty,\ 1)$에서는 $f(x)=-x-2$

   $x\in(1,\ +\infty)$에서는 $f(x)=3x-5$

   이 함수의 그라프를 그려라. 그리고 다음과 같은 모임을 구하여라.

   1) $\{x \mid f(x)=0\}$　　2) $\{x \mid f(x)>-1\}$

   3) $\{x \mid f(x)>0\}$　　4) $\{x \mid f(x)<0\}$

7. 어떤 1차함수의 독립변수 $x$가 $[-6,\ -2]$에서 변할 때 함수값 $y$는 $[2,\ 6]$에서 변한다. 이 함수를 구하여라.

   또한 독립변수 $x$가 $[0,\ 4]$에서 변할 때 함수값 $y$는 $[-4,\ 0]$에서 변한다. 이 함수를 구하여라.

8. 함수 $y=ax+2$의 그라프가 점 $(-2,\ 1)$을 지난다. 이 그라프는 또한 다음 점들을 지나는가?

$\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, (0.5, 2.25), (4, 5)

9. 함수 $y=2x-1$의 그라프와 $x$축에 관해서 대칭인 그라프를 그리고 이 그라프로 표시되는 함수를 구하여라.

10. 용수철의 늘음은 그것에 단 추의 질량에 비례한다. 15$g$의 추를 달았을 때 용수철의 길이가 18cm였고 30$g$의 추를 달았을 때는 28cm였다. 추의 질량이 $x$g, 용수철의 길이를 $y$cm라고 할 때 $y$를 $x$의 식으로 표시하여라.

11. 그라프에 의하여 다음 방정식을 풀어라.

1) $2x+1=x+5$　　2) $1-x=2x-1$　　3) $|x-1|=2$

12. 그라프에 의하여 다음 안같기식을 풀어라.

1) $3x-5>x+7$　　2) $4-5x\leq 2-8x$

13. 다음 2차함수의 그라프는 어느쪽으로 벌어진 포물선인가? 정점의 자리표, $y$축과의 사귐점을 구하여라.

1) $y=4x^2-2x+3$　　2) $y=x^2-2x-63$　　3) $y=-3x^2+2x-9$

14. 다음 두 함수의 그라프가 같은 정점을 가진다는것을 알고 $a$, $b$의 값을 구하여라.

$$y=x^2-2(a+1)x+a-1,\ y=2x^2+4(b-1)x+b$$

15. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=\left|x^2-x-6\right|$　　2) $y=\left|6+x-x^2\right|$

16. 다음 2차함수의 증가구간과 감소구간, 최대값 또는 최소값을 구하여라. 그리고 이 함수의 그라프를 대략 그려라.

1) $y=x^2-4x-5$　　2) $y=-2x^2+3x-2$　　3) $y=9x^2-6x+1$

17. $a$를 변화시킬 때 함수 $y=x^2+ax$의 그라프의 정점은 어떤 선을 따라 움직이겠는가?

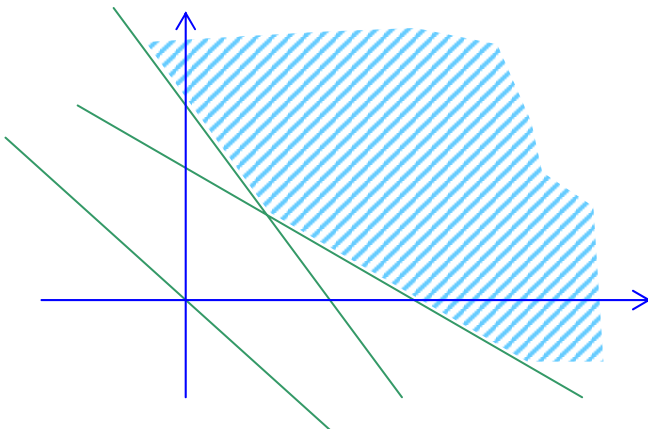
18. $y=a(x+1)^2+bx$의 그라프가 점 (1, 14)와 (−2, −1)을 지난다. $a$, $b$의 값을 구하여라. 이 함수의 최소값은 얼마인가?

19. $k$가 어떤 값을 잡을 때 직선 $y=kx-9$가 함수 $y=x^2-4x$의 그라프에 접하겠는가? 또 접점의 자리표를 구하여라.

20. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=x(|x|-4)$　　2) $y=\frac{1}{2}(x^2-1)+\left|x^2-1\right|$

3) $y=(x-3)^2-2|x-3|+2$

# 제9장. 련립방정식과 련립안같기식

## 제1절. 련립두변수1차방정식

련립두변수1차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p & ① \\ a_2x+b_2y=q & ② \end{cases}$$

을 풀자.

$$①\times b_2-②\times b_1$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2p-b_1q$$

$$②\times a_1-①\times a_2$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1q-a_2p$$

$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$일 때 풀이공식은 다음과 같다.

$$x=\frac{b_2p-b_1q}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$y=\frac{a_1q-a_2p}{a_1b_2-a_2b_1}$$

이 공식에서 분자와 분모는 표시

$$\begin{vmatrix} p & b_1 \\ q & b_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & p \\ a_2 & q \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

들로 표현할수 있다.

4개의 수 $a$, $b$, $c$, $d$들로 만든 표시

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

a b
c d

를 2차행렬식이라고 부른다.

**례 1** 다음 2차행렬식을 계산하여라.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+b \end{vmatrix}$$

(풀이) $$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 6=10-18=-8$$

$$\begin{vmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+b \end{vmatrix}=(a-b)(a+b)-(-b)2b=a^2+b^2$$

**알아보기** 련립두변수1차방정식의 풀이공식은 2차행렬식들에 의하여 어떻게 표시할수 있는가?

련립두변수1차방정식의 풀이공식에서 분모와 분자들을 2차행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$b_2p - b_1q = \begin{vmatrix} p & b_1 \\ q & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1q - a_2p = \begin{vmatrix} a_1 & p \\ a_2 & q \end{vmatrix}$$

행렬식

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 을 **결수행렬식**이라고 부른다.

련립두변수1차방정식의 풀이공식은 행렬식에 의하여 다음과 같이 표시된다.

**례 2** 다음 련립방정식을 행렬식에 의하여 풀어라.

$$\begin{cases} 7x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

(풀이)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}}=\frac{12-4}{21-10}=\frac{8}{11},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}7 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-6}{11}$$

## 문 제

1. 다음 행렬식의 값을 구하여라.

1) $\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 2 & 7\end{vmatrix}$  2) $\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}$  3) $\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 0 & 0\end{vmatrix}$  4) $\begin{vmatrix}0 & 5\\ 0 & -1\end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$  6) $\begin{vmatrix}n+1 & n\\ n & n+1\end{vmatrix}$  7) $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}$

2. 다음 수들을 값으로 가지는 2차행렬식을 만들어라.

1) $xy-ab$  2) $a+2b$  3) $a+b+c$

3. 행렬식을 리용하여 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases}3x-5y=1\\ 2x+3y=7\end{cases}$  2) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=\frac{1}{3}\\ x+\frac{3}{4}y=\frac{5}{2}\end{cases}$

3) $\begin{cases}29x-3y=35\\ 85x-47y=-9\end{cases}$  4) $\begin{cases}6x-7y=4.6\\ 1.8x-5y=0.8\end{cases}$

앞으로 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\mathrm{D}$, $\begin{vmatrix}p & b_1\\ q & b_2\end{vmatrix}=\mathrm{D}_x$, $\begin{vmatrix}a_1 & p\\ a_2 & q\end{vmatrix}=\mathrm{D}_y$ 라는 표시를 쓸 때도 있다.

**례 3** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases}mx+y=m+1\\ x+my=2m\end{cases}$$

(풀이)

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m^2-1=(m-1)(m+1)$$

$$\mathrm{D}_x=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\ 2m & m\end{vmatrix}=m^2-m=m(m-1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (2m+1)(m-1)$$

따라서 $m \neq \pm 1$일 때 풀이는

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{m}{m+1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m+1}{m+1}$$

**례 4** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} y - |x-1| = 2 \\ y - 1 = 2x \end{cases}$$

(풀이) 1) $x - 1 \geq 0$인 경우

$$\begin{cases} y - (x-1) = 2 \\ y - 1 = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$$

이것을 풀면 $x=0$, $y=1$

그런데 $x = 0$은 $x \geq 1$이라는 조건에 맞지 않으므로 $x=0$, $y=1$은 풀이로 되지 않는다.

2) $x-1<0$인 경우

$$\begin{cases} y + (x-1) = 2 \\ y - 1 = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + x = 3 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$$

이것을 풀면 $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{7}{3}$이고 $x = \frac{2}{3}$는 $x \leq 1$이라는 조건에 맞으므로 $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{7}{3}$은 풀이로 된다.

풀이모임 $\left\{\left(\frac{2}{3}, \ \frac{7}{3}\right)\right\}$

## 문 제

1. $x$, $y$에 관한 다음 련립방정식을 풀어라.(이때 $m$을 보조변수라고 부를 때가 있다.)

1) $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (1+m)x - y = 1 \\ 3x + (1-m)y = 1 \end{cases}$

2. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} y=|x|+1 \\ y+3x=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+|y-2|=11 \\ |x-3|+y=10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3|x-2|+2|y+1|=1 \\ 4x-3y=18 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-2y}-\dfrac{14}{2x+y}=1 \\ \dfrac{5}{x-2y}+\dfrac{7}{2x+y}=6 \end{cases}$$

형태의 련립방정식은 련립1차방정식이 아니다.

련립1차방정식의 풀이법을 리용하여 이러한 형태의 련립방정식은 어떻게 풀수 있겠는가?

우의 련립방정식을 풀자.

$$X=\frac{1}{x-2y} \quad ① \qquad\qquad Y=\frac{1}{2x+y} \quad ②$$

로 놓으면 주어진 련립방정식은

$$\begin{cases} 3X-14Y=1 \\ 5X+7Y=6 \end{cases}$$

형태의 련립1차방정식으로 표시된다.

이 련립방정식을 풀면 $X=1$, $Y=\frac{1}{7}$이다.

$X=1,\ Y=\frac{1}{7}$을 각각 ①, ②에 갈아넣으면 련립1차방정식

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

이 만들어지고 이 련립방정식을 풀면 $x=3$, $y=1$이다.

따라서 풀이모임 $\{(3,\ 1)\}$

## 문 제

다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{y}=3 \\ \dfrac{20}{x}+\dfrac{6}{y}=-10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2 \\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+2y}+\dfrac{1}{x+2y}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{3x+2y}-\dfrac{1}{x+2y}=\dfrac{3}{8} \end{cases}$

## 련 습 문 제

1. 다음 2차행렬식을 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{3}-\sqrt{5} \\ \sqrt{3}+\sqrt{5} & \sqrt{3}+\sqrt{2} \end{vmatrix}$　　2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & 1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$　　4) $\begin{vmatrix} 1.5 & -0.7 \\ 2.2 & -0.6 \end{vmatrix}$

2. 다음 수들을 값으로 가지는 2차행렬식을 만들어라.

1) $x-y$　　2) $(a+b)(a-b)$　　3) $pq+1$

3. 다음 련립방정식을 행렬식을 리용하여 풀어라.

1) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x-y=5 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 14x+7y=2 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} 13x-7y-10=0 \\ 19x+15y-2=0 \end{cases}$

4. $x$, $y$에 관한 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} mx-y=-1 \\ 3mx-my=-3 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2 \\ (a-b)x+(a+b)y=a^2+b^2 \end{cases}$

5. $x$, $y$에 관한 다음의 련립방정식이 하나의 풀이를 가지도록 $a$를 정하고 그 풀이를 구하여라.

$$\begin{cases} (a^2-2)x=a+1 \\ a^2x-(a+1)y=a-1 \end{cases}$$

6. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} |x-1|=2y+1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x+|y-1|=3 \\ 3|x|+2y=9 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} |x+3|+|y+1|=3 \\ 2x-7y=4 \end{cases}$

7. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=13 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-6 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+3y}+\dfrac{5}{2x-3y}=2 \\ \dfrac{1}{x+3y}-\dfrac{3}{2x-3y}=-\dfrac{4}{15} \end{cases}$

8. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $x+y-4=2x+3y-11=3x+2y-12$　　2) $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y+14}{3}$

탐 구

련립1차방정식 $\begin{cases} a_1x+b_1y=p \\ a_2x+b_2y=q \end{cases}$ 에서

1) 어떤 경우에 무수히 많은 풀이를 가지는가?

2) 어떤 경우에 풀이를 가지지 않는가?

## 제2절. 련립세변수1차방정식

보조변수가 들어있는 련립세변수1차방정식과 특수한 류형의 련립세변수1차방정식들의 풀이법을 보자.

례 1 다음 련립1차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} mx+y+z=1 & ① \\ x+my+z=m & ② \\ x+y+mz=m^2 & ③ \end{cases}$$

(풀이) ①$-m\times$②

$$\begin{array}{rl} & mx+y+z=1 \\ -) & mx+m^2y+mz=m^2 \\ \hline & (1-m^2)y+(1-m)z=1-m^2 \end{array} \qquad ④$$

②－③

$$\begin{array}{rl} & x+my+z=m \\ -) & x+y+mz=m^2 \\ \hline & (m-1)y+(1-m)z=m-m^2 \end{array} \qquad ⑤$$

④－⑤

$$\begin{array}{rl} & (1-m^2)y+(1-m)z=1-m^2 \\ -) & (m-1)y+(1-m)z=m-m^2 \\ \hline & (2-m-m^2)y \qquad =1-m \end{array}$$

따라서 $m \neq 1$, $m \neq -2$일 때

$$y = \frac{1}{m+2} \qquad ⑥$$

⑥을 ⑤에 갈아넣으면

$$\frac{m-1}{m+2} + (1-m)^2 = m(1-m)$$

따라서 $m \neq 1$일 때

$$-\frac{1}{m+2} + z = m$$

즉 $$z = \frac{(m+1)^2}{m+2} \qquad ⑦$$

⑥과 ⑦을 ②에 갈아넣으면

$$x + \frac{m}{m+2} + \frac{(m+1)^2}{m+2} = m$$

즉 $x = -\dfrac{m+1}{m+2}$

그러므로 $m \neq 1, m \neq -2$일 때 풀이는

$$x = -\frac{m+1}{m+2}, \quad y = \frac{1}{m+2}, \quad z = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

**례 2** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x+y} - \dfrac{1}{y+z} = 1 \\ \dfrac{4}{y+z} + \dfrac{2}{x+z} = 2 \\ \dfrac{4}{x+z} + \dfrac{3}{x+y} = -3 \end{cases}$$

(풀이) $\mathrm{X} = \dfrac{1}{x+y}$ ①, $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{y+z}$ ②, $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{z+x}$ ③

로 놓으면 주어진 방정식은

$$\begin{cases} 6\mathrm{X} - \mathrm{Y} = 1 \\ 4\mathrm{Y} + 2\mathrm{Z} = 2 \\ 4\mathrm{Z} + 3\mathrm{X} = -3 \end{cases}$$ 형태의 련립방정식으로 표시된다.

이 련립방정식을 풀면 $X=\frac{1}{3}$, $Y=1$, $Z=-1$

이것을 각각 ①, ②, ③에 갈아넣으면 련립1차방정식

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=1 \\ z+x=-1 \end{cases}$$

이 만들어지고 이 련립1차방정식을 풀면 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{5}{2}$, $z=-\frac{3}{2}$

풀이모임 $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$

## 문 제

1. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y+z=1 \\ x+y+a^2z=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+az=1 \\ x+ay+a^2z=2 \end{cases}$

2. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=14 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=10 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2}{x+2y}+\frac{3}{2x+z}=1 \\ \frac{1}{x+2y}-\frac{2}{y+2z}=-3 \\ \frac{1}{2x+z}+\frac{3}{y+2z}=2 \end{cases}$

**례 3** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} & ① \\ 3x+4y+2z=26 & ② \end{cases}$$

(풀이) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$로 놓으면

$$x=2k,\ y=3k,\ z=4k \qquad ③$$

③을 ②에 갈아넣으면 $6k+12k+8k=26$

$$26k=26$$

$$k=1$$

$k=1$을 ③에 갈아넣으면

$x=2$, $y=3$, $z=4$

풀이모임 $\{(2, 3, 4)\}$

**례 4** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2x+7y-z=8 \\ 13x-8y+6z=11 \\ 4x+2y+3z=9 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$$

(풀이) 먼저 주어진 방정식에서 3개의 방정식을 선정하여 3개의 방정식으로 된 다음 련립방정식을 풀자.

$$\begin{cases} 2x+7y-z=8 \\ 4x+2y+3z=9 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$$

이 련립방정식을 풀면 풀이는 $x=1$, $y=1$, $z=1$

이 풀이를 주어진 방정식의 두번째 방정식에 갈아넣으면

$$13\cdot1-8\cdot1+6\cdot1=11$$

즉 $x=1$, $y=1$, $z=1$은 방정식 $13x-8y+6z=11$의 풀이로 된다.

따라서 풀이모임 $\{(1, 1, 1)\}$

## 문 제

1. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x-1=y+3=z \\ 5x-4y+z=17 \end{cases}$

2) $\dfrac{3y+2z}{4}=\dfrac{3y+z}{6}=\dfrac{5x+y-z}{5}=2$

2. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ 3x+2y+3z=20 \\ 4x-2y-z=12 \\ x+5y-2z=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x-2y+z=19 \\ 4x-y+3z=13 \\ 3x+2y-4z=16 \\ x+3y-z=15 \end{cases}$

## 련 습 문 제

1. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=2 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{y}+\dfrac{4}{z}=3 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{y}+\dfrac{1}{z}=5 \end{cases}$  2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2y}-\dfrac{1}{3y-z}=2 \\ \dfrac{1}{2x+3z}-\dfrac{1}{x-2y}=0 \\ \dfrac{6}{2x+3z}-\dfrac{1}{3y-z}=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{-3} \\ 3x+2y-5z=4 \end{cases}$

2. 다음 두 련립방정식이 같은 풀이를 가지도록 $a$, $b$, $c$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} ax+by+cz=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{z}=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax-by+cz=1 \\ ax+by-cz=1 \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=0 \end{cases}$$

3. 세자리자연수가 있다. 이 수의 수자들의 합의 48배는 이 수와 같고 매 자리수자를 거꿀순서로 쓴 세자리수는 주어진 수보다 198 작다. 또 하나의 자리수자와 백의 자리수자의 합은 열의 자리수자의 2배이다. 이 자연수를 구하여라.

## 제3절. 련립안갈기식

### 1. 두변수1차안갈기식과 평면구역

**알아보기** 1) 다음 안갈기식들가운데서 왼변이 두변수 1차식인것을 찾아보아라.

$3x-5-y^2<0$  $2x-y+1>0$

$4x^2-3x-6>0$  $x+y-4\geq 0$

2) $x$, $y$값의 다음의 쌍들가운데서 어느것이 1)의 안갈기식에 맞는가?

(1, 3), (1, 4) (4, 5), (0, 5), (1, −4), (2, 7)

$ax+by+c<0$ $(ax+by+c\le 0)$

또는 $ax+by+c>0$ $(ax+by+c\ge 0)$

와 같은 모양의 안같기식을 두변수1차안같기식이라고 부른다.

여기서 $a$, $b$는 령이 아니며 $c$는 상수이다.

두변수1차안같기식에 맞는 변수 $x$, $y$의 값의 쌍을 그 안같기식의 풀이라고 부른다.

**례 1** 안같기식

$$3x+5>2y \qquad -x+y\ge 3 \qquad 7x-2y\le 0$$

들은 모두 두변수1차안같기식이다.

## 문 제

1. $x$, $y$값의 다음 쌍들가운데서 어느것이 안같기식 $4x-3y-5\ge 0$의 풀이로 되는가?
   $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, -3)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(4, 5)$, $(3, 2)$, $(-1, -3)$
2. $x$, $y$값의 쌍 $(3, m)$이 안같기식 $2x+3y-1>0$의 풀이로 되자면 $m$은 어떤 수여야 하는가?

**알아보기** 방정식 $y=2$의 그라프의 웃쪽 반평면에 있는 점의 $x$자리표, $y$자리표는 각각 어떤 수인가?

일반적으로 다음 사실을 알수 있다.

① 모임 $\{(x, y) \mid x\ge a\}$ : 직선 $x=a$의 오른쪽반평면
② 모임 $\{(x, y) \mid x\le a\}$ : 직선 $x=a$의 왼쪽반평면
③ 모임 $\{(x, y) \mid y\ge b\}$ : 직선 $y=b$의 웃쪽반평면
④ 모임 $\{(x, y) \mid y\le b\}$ : 직선 $y=b$의 아래쪽반평면

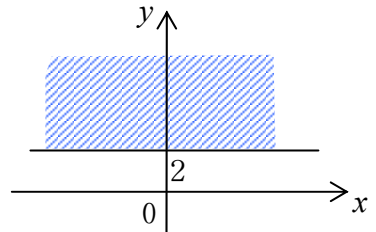



그림 9-1

두변수1차안같기식 $ax+by+c>0$을 $by>-ax-c$로 변형하고

$$b>0\text{이면 } y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

$$b<0\text{이면 } y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

와 같이 변형할수 있다.

안갈기식 $y \geq ax+b$, $y \leq ax+b$ 들을 만족시키는 점$(x,\ y)$들의 모임을 자리표평면에서 표시하면 다음과 같다.

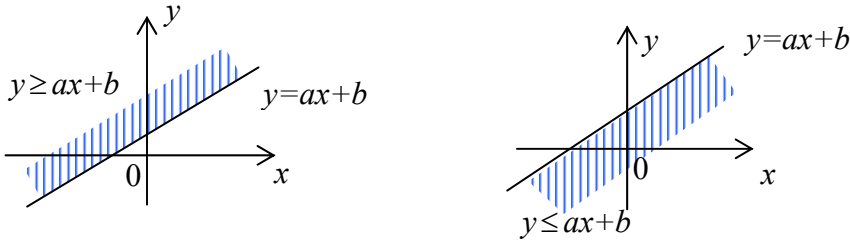



그림 9-2

자리표평면에서 안갈기식 $ax+by+c>0$ 의 풀이모임을 표시하는 평면구역을 간단히 《안갈기식 $ax+by+c>0$ 에 의해 표시되는 평면구역》이라고 말한다.

## 문 제

1. 다음 점모임을 자리표평면에 빗선을 쳐서 표시하여라.

   1) $\{(x,\ y)\ |\ x>1\}$　　2) $\{(x,\ y)\ |\ y>-1\}$

   3) $\{(x,\ y)\ |\ x<1\}$　　4) $\{(x,\ y)\ |\ y<-1\}$

2. 다음 조건에 맞는 점 $(x,\ y)$전부의 모임을 자리표평면에 빗선을 쳐서 표시하여라.

   1) $x>3$　　2) $y<-1.5$　　3) $x<-2.5$　　4) $y>0.25$

3. 다음 점모임을 자리표평면에 빗선을 쳐서 표시하여라.

   1) $\{(x,\ y)\ |\ 1<x<3\}$　　2) $\{(x,\ y)\ |\ y>1.5$ 또는 $y<-2\}$

   3) $\{(x,\ y)\ |\ |x|>2\}$　　4) $\{(x,\ y)\ |\ |y-2|<-1\}$

4. 자리표평면에서 다음 안갈기식들의 풀이모임을 빗선을 쳐서 표시하여라.

   1) $2x-3>5$　　2) $3x+\frac{1}{2}<0$　　3) $y+0.5>1.5$

   4) $\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}<0$　　5) $|x-2|>1$　　6) $2|y|-4<0$

5. 다음 안갈기식에 의해 표시되는 평면구역을 빗선을 쳐서 표시하여라.

   1) $y>3x-0.5$　　2) $y<2x+1$　　3) $y>|x|$

   4) $y<|x-2|$　　5) $|y|>x-2$　　6) $|y+1|<x$

**알아보기** 련립두변수1차안갈기식의 풀이모임은 자리표평면에서 어떻게 표시되는가?

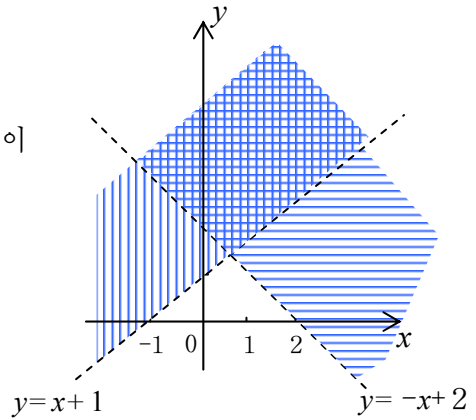
**례 2** 다음 련립두변수1차안갈기식의 풀이모임을 자리표평면에 표시하여라.

$$\begin{cases} x+y>2 \\ x-y<-1 \end{cases}$$

그림 9-3

(풀이) 이 련립안갈기식을 변형하면

$$y>-x+2$$
$$y>x+1$$

따라서 풀이모임은 그림과 같이 두 빗선이 사귀는 구역이다.

련립두변수1차안갈기식이 표시하는 평면구역은 거기에 들어있는 매개 안갈기식들이 표시하는 평면구역들의 공통구역이다.

**례 3** 다음 두변수련립1차안갈기식이 표시하는 평면구역을 자리표평면에 표시하여라.

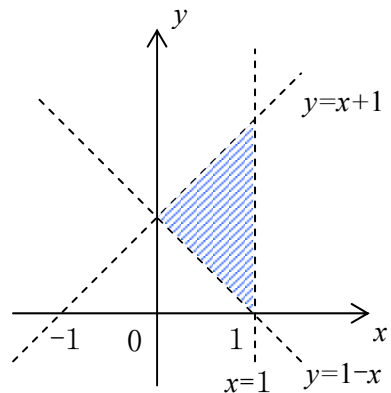
$$\begin{cases} x-y>-1 \\ x+y>1 \\ x<1 \end{cases}$$

(풀이) 이 련립안갈기식을 변형하면

$$\begin{cases} y<x+1 \\ y>1-x \\ x<1 \end{cases}$$

따라서 표시하려는 평면구역은 자리표평면에서 빗선친 부분이다.

그림 9-4

문 제

1. 다음 련립안갈기식이 표시하는 평면구역을 자리표평면에 표시하여라.

1) $\begin{cases} 2x-y<4 \\ x+y<5 \end{cases}$  2) $\begin{cases} x+2y>0 \\ 2x+4y<1 \end{cases}$  3) $\begin{cases} 3x+4y>2 \\ 2x+3y>1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+5y-8>0 \\ 2x-y>0 \end{cases}$  5) $\begin{cases} |y|<3x-1 \\ |y|>-\dfrac{1}{2}x+3 \end{cases}$

2. 정점이 A(－1, 1), B(1, －1), C(0, －1)인 3각형을 련립두변수안갈기식으로 표시하여라.

## 2. 련립두변수1차안갈기식으로 표시되는 평면구역에서 1차식의 최대값과 최소값

직선 $y+x=a$에서 $a=0$으로부터 $a$를 크게 하면 $y+x=a$의 그라프는 $y+x=0$의 그라프로부터 $y$축의 정의 방향으로 평행으로 이동하여간다.

이때 빗선친 평면구역의 점 A에서 처음으로 만났다고 하자.

그러면 A점에서 $x+y$의 값이 빗선친 구역에서 $x+y$값의 최소값으로 된다.

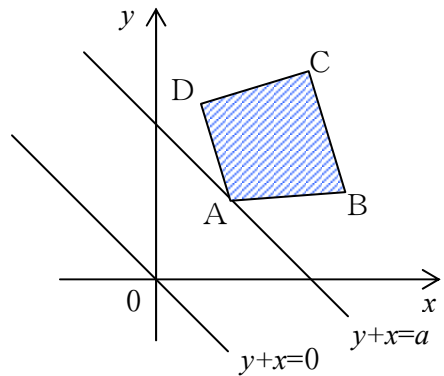



그림 9-5

**알아보기** $x+y$는 빗선친 평면구역의 어느 점에서 최대값을 가지겠는가를 알아보아라.

**례 1** 련립안갈기식

$$\begin{cases} y \geq -\dfrac{3}{2}x+3 \\ y \geq -\dfrac{2}{3}x+2 \end{cases}$$

이 표시하는 평면구역에서 $x+y$의 최소값을 구하여라.

(풀이) 주어진 련립안갈기식이 표시하는 평면구역(그림 9－6)에서

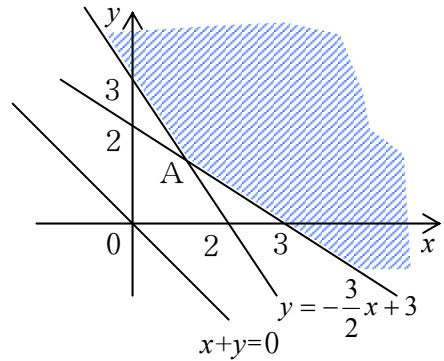
1차식 $x+y=a$의 최소값은 직선 $y+x=0$을 $y$축의 정방향으로 평행이동시킬 때 평면구역과 처음으로 만나는 점 A에서의 값이다.

그림 9-6

점 A의 자리표를 구하면

$$-\frac{3}{2}x+3=-\frac{2}{3}x+2$$

$$x=\frac{6}{5}$$

$$y=-\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}+3=\frac{6}{5}$$

즉 점 A의 자리표는 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{6}{5}\right)$이다.

따라서 구하려는 $x+y=a$의 최소값은 다음과 같다.

$$a=\frac{6}{5}+\frac{6}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$$

**례 2** 두 종류의 자동기계 A와 B가 한시간에 각각 200개, 300개의 제품을 생산한다. 그런데 제품 한개를 생산하는데 A는 2kW·h, B는 3kW·h의 전기를 쓰게 된다. 기계 A 와 B가 교대로 작업하면서 전기를 가장 적게 쓰고 2 100개이상의 제품을 8시간안에 생산하려면 작업을 어떻게 조직하여야 하는가?

(풀이) 기계 A는 $x$시간, 기계 B는 $y$시간 일하도록 작업을 조직하려고 한다고 하자.

그러면 $x\ge 0,\ y\ge 0$이여야 한다.

제품을 8시간안에 생산하여야 하므로

$$x+y\le 8$$

이 시간동안에 두 기계는 2 100개이상의 제품을 생산하여야 하므로

$$200x+300y\ge 2100$$

이때 소비되는 전기는 $a=2x+3y$

이리하여 이 문제는 련립안같기식

$$\begin{cases} x+y\le 8 \\ 200x+300y\ge 2100 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

이 표시하는 평면구역에서 식 $a=2x+3y$ 의 최소값을 구하는 문제로 된다. 련립안갈기식이 표시하는 평면구역과 직선 $2x+3y=0$을 그리면 그림 9−7과 같다.

직선 $2x+3y=0$을 $y$축의 정방향을 따라 평행이동시키면 평면구역의 점 A를 지날 때 $a=2x+3y$가 최소로 된다. 점 A의 자리표를 구하면

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 200x+300y=2100 \end{cases}$$

$$x=3,\ y=5$$

답. 기계 A는 3시간

기계 B는 5시간

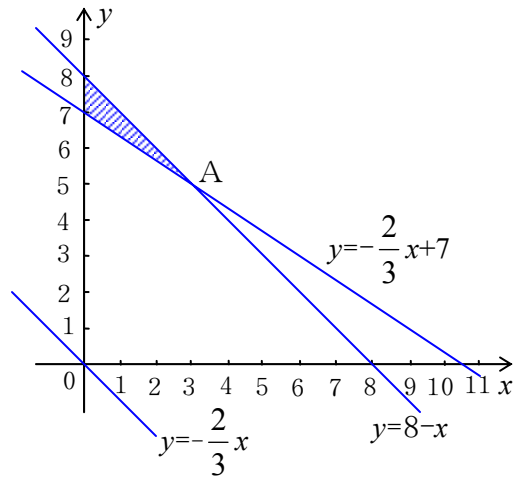



그림 9-7

## 문 제

1. 련립안갈기식

$$\begin{cases} x+2y\le 5 \\ 2x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

이 표시하는 평면구역에서 $2x+y$의 최대값과 최소값을 구하여라.

2. 세가지 원료 A, B, C를 가지고 두가지 종류의 집짐승먹이 X, Y를 만들려고 한다.

매 먹이 한통을 만드는데 드는 원료의 량은 다음 표와 같다.

| 먹이 \ 원료 | A(kg) | B(kg) | C(kg) |
|---|---|---|---|
| X | 3 | 2 | 1 |
| Y | 4 | 1 | 1 |

먹이 X, Y 한통씩의 값은 각각 300원, 200원이다. 원료 A는 24kg, B는 9kg, C는 7kg을 가지고 두 종류의 먹이를 각각 몇통씩 만들어야 생산액이 최대로 되겠는가?

## 련습문제

1. 두 수의 렬 $(3,\ m)$이 안갈기식

$$2x-3y-1>0$$

의 풀이로 되자면 $m$은 어떤 수여야 하는가? 또 $(n,\ -5)$가 풀이로 되자면 $n$이 어떤 수여야 하는가?

2. 그림에서 빗선을 친 평면구역에 맞는 안갈기식을 써라.

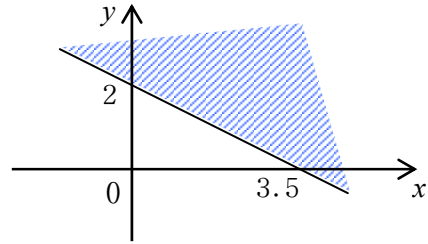
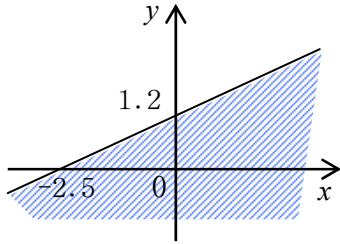



그림 9-8

3. 다음 안갈기식을 평면구역으로 표시하여라.

1) $3x+y+4>0$　　2) $x-2y-6<0$

3) $-3x+|4y-4|>0$　　4) $3y-|x+4|<0$

4. 다음 련립안갈기식을 만족시키는 평면구역을 찾아라.

1) $\begin{cases} 2x-y<4 \\ x+y<5 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x+2y>0 \\ 2x+4y<1 \end{cases}$

5. 다음 점 전부의 모임을 평면에 그려라.

1) $\{(x,\ y)\mid x\geq 1\}$　　2) $\{(x,\ y)\mid y\geq -1\}$

3) $\{(x,\ y)\mid x<4.5$이고 $x>0.5\}$　　4) $\{(x,\ y)\mid y\geq -3$이고 $y\leq 0\}$

5) $\{(x,\ y)\mid x+y\geq 5\}$

6. 그림에서 빗선을 친 부분에 맞는 안갈기식을 써라.

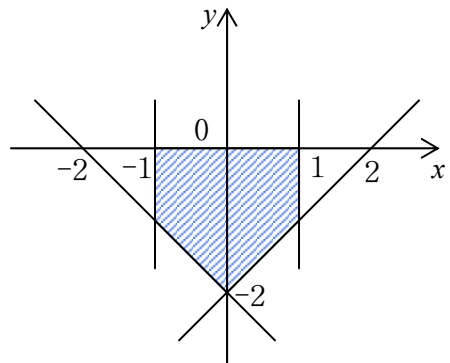
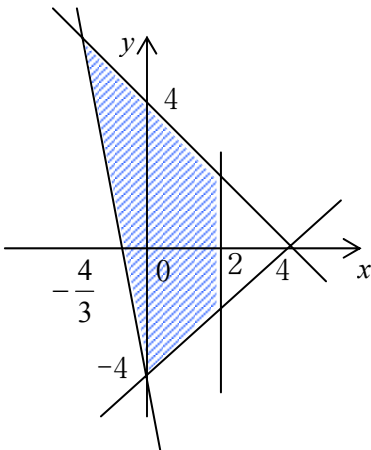



그림 9-9

7. 평면구역

$$\begin{cases} 2x+3y\le 49 \\ 9x+5y\ge 73 \\ 7x-2y\le 84 \\ 2x+5y\ge 24 \\ y\le 11 \\ x>0 \end{cases}$$

에서 $a=4x+3y$의 최소값을 구하여라.

8. 표를 보고 문제를 풀어라.

제품 한개를 만드는데 자재가 A에는 200g 들고 B에는 300g 든다. 세 기대에서 A, B를 각각 같은 량을 만들면서 자재를 가장 많이 쓰게 한다면 A, B를 몇개씩 만들어야 하는가? 이때 쓰는 자재는 얼마인가?

| 기대 | 제품 1개 만드는데 필요한 작업시간 | | 기대를 쓸수 있는 시간 |
|---|---|---|---|
| | 제품 A | 제품 B | |
| $M_1$ | 1 | 3 | 30 |
| $M_2$ | 1 | 1 | 14 |
| $M_3$ | 2 | 1 | 24 |

## 복 습 문 제

1. 다음 2차행렬식을 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} n & n+1 \\ n+2 & n+3 \end{vmatrix}$

2. 다음 수들을 값으로 가지는 2차행렬식을 만들어라.

1) $a^2-b^2$ 2) 3 3) $abc+1$

3. 다음 련립방정식을 행렬식을 리용하여 풀어라.

1) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+4y=-3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

4. $x$, $y$, $z$에 관한 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} ax+by=1 \\ (a+1)x+(b+1)y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax+by=a \\ a^2x+b^2y=b \end{cases}$ 3) $\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+by+z=b \\ x+y+cz=c \end{cases}$

5. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-2y}+\dfrac{1}{x+4y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{4}{3x-2y}+\dfrac{3}{x+4y}=1 \end{cases}$　2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1\dfrac{11}{12} \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{3}{z}=2\dfrac{5}{12} \end{cases}$　3) $\begin{cases} x+5y+2z+3t=1 \\ 2x+y-z-3t=2 \\ 2x+y+z+2t=0 \\ x-2y+3z+4t=3 \end{cases}$

6. 세자리옹근수가 있다. 제일 왼쪽에 있는 수를 제일 오른쪽으로 옮겨놓으면 처음보다 45 작아진다. 백의 자리수자의 9배는 열의 자리수자와 하나의 자리수자로 된 두자리수보다 3 작다. 처음 세자리옹근수를 구하여라.

7. A와 B 두 사람이 공동으로 일을 12일간에 끝낼것을 계획하고 6일간 일하였는데 기한내에 일을 끝낼수 없다는것을 알게 되였다. 그리하여 C에 부탁하여 7일째부터 세 사람이 일을 하여 기한내에 일을 끝냈다. A와 B가 따로따로 일하여 일을 끝내는데 걸리는 날자수의 비는 2 : 3이고 A와 B가 공동으로 일을 끝내는 날자수와 B와 C가 공동으로 일을 끝내는 날자수의 비는 7 : 8이다. 세 사람이 처음부터 공동으로 일을 하면 며칠동안에 일을 끝내겠는가?

8. 다음 련립안갈기식을 만족시키는 평면구역을 그려라.

1) $\begin{cases} 3x+5y\le 1 \\ x-3y\ge 2 \end{cases}$　2) $|2x-1|>|2y+1|$

9. 평면구역

$$\begin{cases} 2x+y\le 26 \\ 2x+3y\le 42 \\ x+3y\le 36 \\ 0\le x\le 12 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

에서 1차식 $5x+4y$의 최대값을 구하여라.

10. 평면구역에서 최대, 최소를 구하는 방법으로 푸는 실천문제를 만들고 풀어라.

# 찾 아 보 기